А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Академічний рівень

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2010

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(Наказ від 03.03.2010 р. № 177)

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів : академ. рівень / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2010. — 352 с. : іл.
ISBN 978-966-474-094-1.

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]
ББК 22.141я721

ISBN 978-966-474-094-1

Від авторів

ЛЮБІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру і початки аналізу.**

Цей предмет надзвичайно важливий. Мабуть, немає сьогодні такої галузі науки, де б не застосовувалися досягнення цього розділу математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет, який розвиває аналітичне і логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість. Ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним *шрифтом***. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі у тестовій формі з рубрики «Перевір себе».

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте <u>за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби</u>. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Червоним кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, синім кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

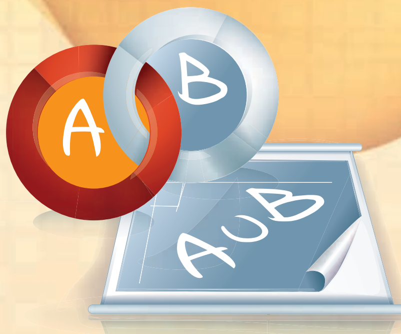
Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка і факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n°	завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^*	задачі для математичних гуртків і факультативів;
$\odot$	доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;
$(\cdot\cdot)$	доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;
▲	закінчення доведення теореми;
	рубрика «Коли зроблено уроки».

§ 1 МНОЖИНИ. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ



У цьому параграфі ви ознайомитеся з такими поняттями, як множина, елементи множини. Дізнаєтесь, які множини називають рівними, які існують способи задання множин, яку множину називають порожньою, яку множину називають підмножиною іншої множини, яку множину називають перетином, а яку — об’єднанням множин.

Ви навчитеся задавати множину переліком елементів і за допомогою характеристичної властивості її елементів, установлювати рівність множин, визначати, чи є дана множина підмножиною іншої множини, знаходити перетин і об’єднання множин, ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера співвідношення між множинами.

1. Множина та її елементи

Ми часто говоримо: косяк риб; зграя птахів; рій бджіл; колекція марок; зібрання картин; набір ручок; букет квітів; компанія друзів; парк машин; отара овець.

Якщо в цих парах перетасувати перші слова, то може вийти смішно. Наприклад, букет овець, косяк картин, колекція друзів тощо. Водночас такі словосполучення, як колекція риб, колекція картин, колекція ручок, колекція машин тощо, достатньо прийнятні. Справа в тому, що слово «колекція» досить універсальне. Однак у математиці є більш всеосяжне слово, яким можна замінити будь-яке з перших слів у наведених парах. Це слово **множина**.

Наведемо ще кілька прикладів множин:

- множина учнів вашого класу;
- множина планет Сонячної системи;
- множина двоцифрових чисел;
- множина пар чисел $(x;\ y)$, які є розв'язками рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

Окремі найважливіші множини мають загальноприйняті назви та позначення:

- множина точок площини — **геометрична фігура**;
- множина точок, яким притаманна певна властивість, — **геометричне місце точок (ГМТ)**;
- множина значень аргументу функції f — **область визначення функції** f, яку позначають $D(f)$;
- множина значень функції f — **область значень функції** f, яку позначають $E(f)$;
- множина натуральних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{N}$;
- множина цілих чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$;
- множина раціональних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$;
- множина дійсних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{R}$.

Множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — приклади **числових** множин. Також прикладами числових множин є **числові проміжки**. Наприклад, проміжки $[-3;\ 2]$, $(5;\ +\infty)$, $(-\infty;\ -4]$ є числовими множинами.

Як правило, множини позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D тощо.

Об'єкти, які складають множину, називають **елементами** цієї множини. Зазвичай елементи позначають малими латинськими літерами: a, b, c, d тощо.

Якщо a належить множині A, то пишуть $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо b не належить множині A, то пишуть $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Якщо множина A складається з трьох елементів a, b, c, то пишуть $A = \{a, b, c\}$.

Наприклад, якщо M — множина натуральних дільників числа 6, то пишуть $M = \{1, 2, 3, 6\}$. Множина дільників числа 6, які є складеними числами, має такий вигляд: $\{6\}$. Це приклад **одноелементної** множини.

Позначення множини за допомогою фігурних дужок, у яких указано список її елементів, є зручним у тих випадках, коли множина складається з невеликої кількості елементів.

Означення. Дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A.

Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$.

З означення випливає, що ***множина однозначно визначається своїми елементами***. Якщо множину записано за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення. Так, множина, яка складається з трьох елементів a, b, c, припускає шість варіантів запису:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}.$$

Оскільки з означення рівних множин випливає, що, наприклад, $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c\}$, то надалі будемо розглядати множини, які складаються з різних елементів. Так, множина букв слова «шаровари» має вигляд {ш, а, р, о, в, и}.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Ми вже використовували цей спосіб, записуючи множину за допомогою фігурних дужок, у яких зазначали список її елементів. Зрозуміло, що не всяку множину можна задати в такий спосіб. Наприклад, множину парних чисел так задати не можна.

Другий спосіб полягає в тому, що задається **характеристична властивість** елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини і тільки їм. Наприклад, властивість «натуральне число при діленні на 2 дає в остачі 1» задає множину непарних чисел.

Якщо задавати множину характеристичною властивістю її елементів, то може статися, що жодний об'єкт такої властивості не має.

Розглянемо приклади.

- Множина трикутників, сторони яких пропорційні числам 1, 2, 5. З нерівності трикутника випливає, що ця множина не містить жодного елемента.
- Позначимо через A множину учнів вашого класу, які є майстрами спорту з шахів. Може виявитися, що множина A також не містить жодного елемента.
- Розглядаючи множину коренів довільного рівняння, слід передбачити ситуацію, коли рівняння коренів не має.

Наведені приклади вказують на те, що зручно до сукупності множин віднести ще одну особливу множину, яка не містить жодного елемента. Її називають **порожньою множиною** і позначають символом $\varnothing$.

?

1. Наведіть приклади множин.
2. Як позначають множину та її елементи?
3. Як позначають множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел?
4. Як записати, що елемент a належить (не належить) множині A?
5. Які множини називають рівними?
6. Які існують способи задання множин?
7. Яку множину називають порожньою? Як її позначають?

Вправи

1.° Як називають множину точок кута, рівновіддалених від його сторін?

2.° Як називають множину вовків, які підкоряються одному ватажку?

3.° Назвіть яку-небудь множину запорізьких козаків.

4.° Як називають множину вчителів, які працюють в одній школі?

5.° Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $5 * \mathbb{N}$; 3) $-5 * \mathbb{Q}$; 5) $3{,}14 * \mathbb{Q}$; 7) $1 * \mathbb{R}$;

2) $0 * \mathbb{N}$; 4) $-\frac{1}{2} * \mathbb{Z}$; 6) $\pi * \mathbb{Q}$; 8) $\sqrt{2} * \mathbb{R}$.

6.° Дано функцію $f(x) = x^2 + 1$. Поставте замість зірочки знак $\in$ або $\notin$ так, щоб отримати правильне твердження:

1) $3 * D(f)$;
2) $0 * D(f)$;
3) $0 * E(f)$;
4) $\frac{1}{2} * E(f)$;
5) $1{,}01 * E(f)$.

7.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $1 \in \{1, 2, 3\}$;
2) $1 \notin \{1\}$;
3) $\{1\} \in \{1, 2\}$;
4) $\varnothing \notin \{1, 2\}$?

8.° Запишіть множину коренів рівняння:

1) $x(x - 1) = 0$;
2) $(x - 2)(x^2 - 4) = 0$;
3) $x = 2$;
4) $x^2 + 3 = 0$.

9.° Задайте переліком елементів множину:

1) правильних дробів зі знаменником 7;
2) правильних дробів, знаменник яких не перевищує 4;
3) букв у слові «математика»;
4) цифр числа 5555.

10.• Чи рівні множини A і B, якщо:

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(1; 0)\}$, $B = \{(0; 1)\}$;
3) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$?

11.• Чи рівні множини A і B, якщо:

1) $A = [-1; 2)$, $B = (-1; 2]$;
2) A — множина коренів рівняння $|x| = x$, $B = [0; +\infty)$;
3) A — множина чотирикутників, у яких протилежні сторони попарно рівні; B — множина чотирикутників, у яких діагоналі точкою перетину діляться навпіл?

12.• Які з наступних множин дорівнюють порожній множині:

1) множина трикутників, сума кутів яких дорівнює 181°;
2) множина гірських вершин заввишки понад 8800 м;
3) множина гострокутних трикутників, медіана яких дорівнює половині сторони, до якої вона проведена;
4) множина функцій, графіком яких є коло?

Вправи для повторення

13. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 7x = 0$;
2) $4x^2 - 5 = 0$;
3) $x^2 - 12x + 24 = 0$;
4) $-x^2 - 8x + 9 = 0$;
5) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;
6) $16x^2 + 24x + 9 = 0$.

14. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $6 - 4x > 7 - 6x$;
2) $12 - 5x < 3 - 2x$;
3) $8 + 6y < 2(5y - 8)$;
4) $7a - 3 \geqslant 7(a + 1)$;
5) $4(2 + 3b) - 3(4b - 3) > 0$;
6) $\frac{12 - 9x}{7} \geqslant 7$;
7) $x^2 - 8x + 7 > 0$;
8) $x^2 + x - 2 \leqslant 0$;
9) $9 - x^2 \geqslant 0$;
10) $6x^2 - 2x < 0$;
11) $-x^2 + 3x + 4 > 0$;
12) $0{,}2x^2 > 1{,}8x$.

2. Підмножина. Операції над множинами

Розглянемо множину цифр десяткової системи числення $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Виокремимо з множини A ті її елементи, які є парними цифрами. Отримаємо множину $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, усі елементи якої є елементами множини A.

Означення. Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»).

Наприклад, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\{a\} \subset \{a, b\}$, $(1; 2] \subset [1; 2]$, $[2; 5] \subset (1; +\infty)$.

Множина учнів вашого класу є підмножиною множини учнів вашої школи.

Множина ссавців є підмножиною множини хребетних.

Множина точок променя CB є підмножиною множини точок прямої AB (рис. 1).

Для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 2 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$ (або $A \supset B$).

На рисунку 3 за допомогою діаграм Ейлера показано співвідношення між множинами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$.

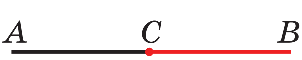


Рис. 1

З означень підмножини і рівності множин випливає, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

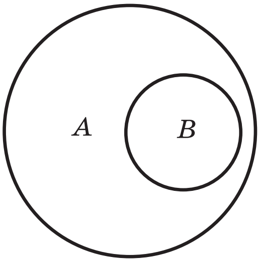
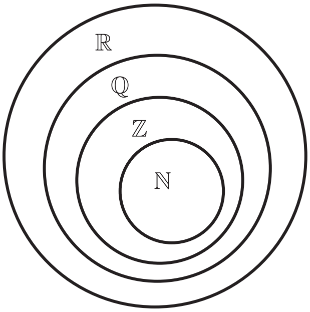


Рис. 2



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Рис. 3

Якщо в множині B немає такого елемента, який не належить множині A, то множина B є підмножиною множини A. У силу цих міркувань порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини. Справді, порожня множина не містить жодного елемента, отже, у ній немає елемента, який не належить даній множині A. Тому для будь-якої множини A справедливе твердження: $\varnothing \subset A$.

ПРИКЛАД Випишіть усі підмножини множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання. Маємо: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\varnothing$.

Нехай A — множина розв'язків рівняння $x + y = 5$, а B — множина розв'язків рівняння $x - y = 3$. Тоді множина C розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3 \end{cases}$$

складається з усіх елементів, які належать і множині A, і множині B. У такому випадку кажуть, що множина C є **перетином** множин A і B.

Означення. Перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B.

Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$.

Наприклад, $[-1;\ 3) \cap (2;\ +\infty) = (2;\ 3)$ (рис. 4).

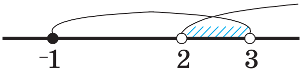


Рис. 4

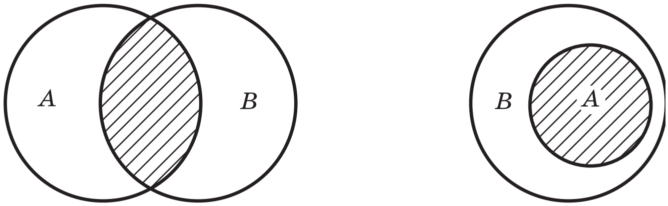
Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетином є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також зазначимо, що $A \cap \varnothing = \varnothing$.

З означення перетину двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$.

Наприклад,

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N},$$
$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}.$$

Перетин множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 5 заштрихована фігура зображує множину $A \cap B$.



а) *б*)

Рис. 5

Для того щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати кожне з рівнянь $x^2 - x = 0$ і $x^2 - 1 = 0$.

Маємо: $A = \{0, 1\}$ — множина коренів першого рівняння, $B = \{-1, 1\}$ — множина коренів другого рівняння. Зрозуміло, що множина $C = \{-1, 0, 1\}$, кожний елемент якої належить або множині A, або множині B, є множиною коренів заданого рівняння. Множину C називають **об'єднанням** множин A і B.

Означення. Об'єднанням множин *A* і *B* називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині *A*, або множині *B*.

Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$.

Наприклад, $(-3; 1) \cup (0; 2] = (-3; 2]$, $(-\infty; 1) \cup (-1; +\infty) = (-\infty; +\infty)$.

Об'єднання множин ірраціональних і раціональних чисел дорівнює множині дійсних чисел.

Зауважимо, що $A \cup \varnothing = A$.

З означення об'єднання двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$.

Наприклад, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Об'єднання множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 6 заштрихована фігура зображує множину $A \cup B$.

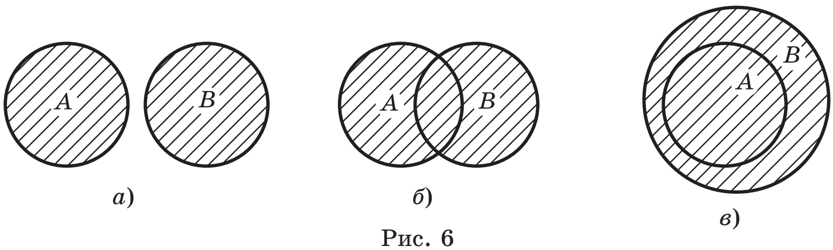


Рис. 6

Якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків рівнянь (нерівностей), то кажуть, що треба розв'язати **сукупність рівнянь (нерівностей).**

Сукупність записують за допомогою квадратної дужки. Так, щоб розв'язати рівняння $(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$, треба розв'язати сукупність рівнянь

$$\left[\begin{aligned} &x^2 - x = 0, \\ &x^2 - 1 = 0. \end{aligned}\right.$$

?

1. Яку множину називають підмножиною даної множини?
2. Як наочно ілюструють співвідношення між множинами?
3. Яка множина є підмножиною будь-якої множини?
4. Що називають перетином двох множин?
5. Що називають об'єднанням двох множин?
6. Як за допомогою діаграм Ейлера ілюструють перетин (об'єднання) двох множин?

Вправи

15.° Назвіть кілька підмножин учнів вашого класу.

16.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок прямої.

17.° Назвіть які-небудь геометричні фігури, які є підмножинами множини точок круга.

18.° Нехай A — множина букв у слові «координата». Множина букв якого слова є підмножиною множини A:

1) кора;	4) крокодил;	7) тин;	10) дорога;
2) дірка;	5) нитки;	8) криниця;	11) дар;
3) картина;	6) нирки;	9) сокирка;	12) кардинал?

19.° Нехай A — множина цифр числа 1958. Чи є множина цифр числа x підмножиною множини A, якщо:

1) $x = 98$;
2) $x = 9510$;
3) $x = 519$;
4) $x = 5858$;
5) $x = 195888$;
6) $x = 91258$?

20.° Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?

21.° Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a\} \in \{a, b\}$;
2) $\{a\} \subset \{a, b\}$;
3) $a \subset \{a, b\}$;
4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

22.• Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

23.• Розмістіть дані множини у такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої:

1) A — множина прямокутників;
   B — множина чотирикутників;
   C — множина квадратів;
   D — множина паралелограмів;
2) A — множина ссавців;
   B — множина собачих;
   C — множина хребетних;
   D — множина вовків;
   E — множина хижих ссавців.

24.• Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера співвідношення між множинами:

1) A — множина невід'ємних раціональних чисел;
   $B = \{0\}$;
   $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;
2) $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;
   A — множина натуральних чисел, кратних 6;
   B — множина натуральних чисел, кратних 3.

25.• Запишіть усі підмножини множини $\{1, 2\}$.

26.• Запишіть усі підмножини множини $\{-1, 0, 1\}$.

27.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

28.• Знайдіть перетин множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 555288 і 82223;
2) 470713 і 400007.

29.• Нехай A — множина двоцифрових чисел, B — множина простих чисел. Чи належить множині $A \cap B$ число: 5, 7, 11, 31, 57, 96?

30.• Знайдіть множину спільних дільників чисел 30 і 45.

31.• Знайдіть перетин множин A і B, якщо:

1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина прямокутних трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
3) A — множина двоцифрових чисел, B — множина натуральних чисел, кратних 19;
4) A — множина одноцифрових чисел, B — множина простих чисел.

32.• Накресліть два трикутники так, щоб їх перетином була така геометрична фігура: 1) відрізок; 2) точка; 3) трикутник; 4) п'ятикутник; 5) шестикутник.

33.• Які фігури можуть бути перетином двох променів, що лежать на одній прямій?

34.• Знайдіть:

1) $[-4; 6) \cap (-2; 7)$;
2) $(-\infty; 3) \cap (1; 4)$;
3) $(-\infty; 2) \cap (3; 8]$;
4) $\mathbb{N} \cap (-3; 4]$;
5) $(-2; 2) \cap \mathbb{Z}$;
6) $(-1; 1] \cap [1; +\infty)$;
7) $(-1; 1] \cap (1; +\infty)$;
8) $\mathbb{R} \cap (-2; 3)$.

35.• Знайдіть:

1) $(-\infty; 2) \cap \mathbb{N}$;
2) $(-\infty; 1) \cap \mathbb{N}$;
3) $[-1; 1) \cap \mathbb{Z}$;
4) $(-\infty; -7) \cap \mathbb{R}$.

36.• Які з наступних тверджень є правильними:

1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

37.• Знайдіть об'єднання множин цифр, які використовуються в запису чисел:

1) 27288 і 56383;
2) 55555 і 777777.

38.• Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:

1) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;
2) A — множина простих чисел, B — множина складених чисел;
3) A — множина простих чисел, B — множина непарних чисел.

39.• Накресліть два трикутники так, щоб їх об'єднанням був: 1) чотирикутник; 2) трикутник; 3) шестикутник. Чи може об'єднання трикутників бути відрізком?

40.• Які фігури можуть бути об'єднанням двох променів, що лежать на одній прямій?

41.• Знайдіть:

1) $(-2;\ 5] \cup (2;\ 7]$;
2) $(-\infty;\ 3) \cup (-3;\ 3]$;
3) $(-\infty;\ 8) \cup [-2;\ +\infty)$;
4) $\mathbb{R} \cup (-7;\ 2]$;
5) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{N}$;
6) $\mathbb{R} \cup \mathbb{N}$.

42.• Знайдіть:

1) $(-\infty;\ 1] \cup [1;\ +\infty)$;
2) $(-\infty;\ 5) \cup (3;\ 5]$;
3) $\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}$;
4) $(5;\ +\infty) \cup \mathbb{R}$.

Вправи для повторення

43. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2}{x-4} = \dfrac{4x}{x-4}$;
2) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{18}{x^2-9}$;
3) $\dfrac{4}{(x+1)^2} + \dfrac{2}{1-x^2} - \dfrac{1}{1-x} = 0$;
4) $\dfrac{12}{(x-5)(x+1)} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{3}{x-5}$.

44. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 6x+3 \geqslant 0, \\ 7-4x < 7; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x+19 \leqslant 5x-1, \\ 10x < 3x+21; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2+x-6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$
4) $\begin{cases} x^2-x-12 \geqslant 0, \\ 10-3x-x^2 > 0. \end{cases}$

45. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\dfrac{x^2}{x+5}$;
2) $\dfrac{x+4}{x^2-4}$;
3) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$;
4) $\dfrac{4}{x-2} + \dfrac{1}{x}$;
5) $\sqrt{6-7x}$;
6) $\dfrac{9}{\sqrt{3x+6}}$;
7) $\sqrt{5-x} + \dfrac{1}{3\sqrt{x}}$;
8) $\sqrt{7x-42} + \dfrac{1}{x^2-8x}$;
9) $\sqrt{-x^2+3x+4}$;
10) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x-12}}$;
11) $\sqrt{x^2+5x-14} - \dfrac{4}{x^2-49}$;
12) $\dfrac{x+2}{\sqrt{35+2x-x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{8-4x}}$?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 27–30 на с. 323–325.

ПІДСУМКИ

Вивчивши матеріал параграфа «Множини. Операції над множинами», ви дізналися, що:

- об'єкти, які складають множину, називають елементами цієї множини;
- дві множини A і B називають рівними, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів, тобто кожний елемент множини A належить множині B і, навпаки, кожний елемент множини B належить множині A. Якщо множини A і B рівні, то пишуть $A = B$. Множина однозначно визначається своїми елементами. Якщо множину записують за допомогою фігурних дужок, то порядок, у якому виписано її елементи, не має значення;
- найчастіше множину задають одним із двох таких способів. Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Другий спосіб полягає в тому, що задається характеристична властивість елементів множини, тобто властивість, яка притаманна всім елементам даної множини і тільки їм;
- множину, яка не містить жодного елемента, називають порожньою множиною і позначають символом $\varnothing$;
- множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A. Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B є підмножиною множини A» або «множина A містить множину B»);
- для ілюстрації співвідношень між множинами використовують схеми, які називають діаграмами Ейлера;
- коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$;
- будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$;
- для будь-якої множини A справедливе твердження: $\varnothing \subset A$;
- перетином множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B. Перетин множин A і B позначають так: $A \cap B$;

- якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетином є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також $A \cap \varnothing = \varnothing$;
- коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$;
- об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин: або множині A, або множині B. Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$;
- $A \cup \varnothing = A$;
- коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$;
- якщо треба знайти об'єднання множин розв'язків рівнянь (нерівностей), то кажуть, що треба розв'язати сукупність рівнянь (нерівностей). Сукупність записують за допомогою квадратної дужки.

§ 2 ПОВТОРЕННЯ ТА РОЗШИРЕННЯ ВІДОМОСТЕЙ ПРО ФУНКЦІЮ

У цьому параграфі ви повторите основні відомості про функцію, дізнаєтеся, що називають найбільшим і найменшим значеннями функції на множині, які функції називають парними, а які — непарними, ознайомитеся з властивостями графіків парних і непарних функцій, дізнаєтеся, яку функцію називають оборотною, які функції називають взаємно оберненими, яке взаємне розміщення графіків взаємно обернених функцій; повторите, як, використовуючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графіки функцій $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = kf(x)$; повторите, які рівняння і нерівності називають рівносильними; дізнаєтеся, яке рівняння і яку нерівність називають наслідком іншого рівняння й іншої нерівності; ознайомитеся з методом інтервалів розв'язування нерівностей.

Ви навчитеся знаходити найбільше і найменше значення функції на множині, досліджувати функцію на парність; будувати графік функції $y = f(kx)$, коли відомо графік функції $y = f(x)$; знаходити функцію, обернену до даної; розв'язувати нерівності методом інтервалів.

3. Функція та її основні властивості

Нагадаємо й уточнимо основні відомості про функцію, з якими ви ознайомилися в 7–9 класах.

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни іншої величини (залежної змінної). Вивчення цих процесів потребує створення їх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є **функція**.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. **Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.**

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f. Кажуть, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x. Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції**.

Множину значень, яких набуває аргумент, тобто множину X, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Наприклад, областю визначення функції $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ є множина $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Множину значень, яких набуває залежна змінна y, тобто множину Y, називають **областю значень функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Наприклад, областю значень функції $y = x^2 + 1$ є множина $E(y) = [1; +\infty)$.

Елементами множин $D(f)$ і $E(f)$ можуть бути об'єкти найрізноманітнішої природи.

Так, якщо кожному многокутнику поставити у відповідність його площу, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина многокутників, а область значень — множина додатних чисел.

Якщо кожній людині поставити у відповідність день тижня, у який вона народилася, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина людей, а область значень — множина днів тижня.

Коли $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, функцію f називають **числовою**.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення і правило, за яким за кожним значенням незалежної змінної з області визначення можна знайти значення залежної змінної з області значень.

Функцію можна задати одним з таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є область визначення виразу, який входить до формули. Наприклад, якщо функція f задана формулою $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

Означення. Графіком числової функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Сказане означає, що коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

Фігура на координатній площині може бути графіком деякої числової функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має з цією фігурою не більше однієї спільної точки. Наприклад, коло не може слугувати графіком жодної функції: тут за заданим значенням аргументу x не завжди однозначно знаходиться значення змінної y (рис. 7).

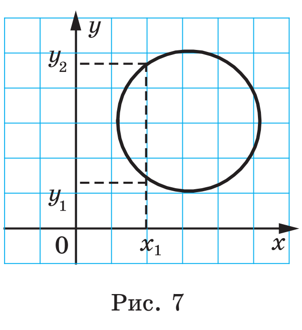
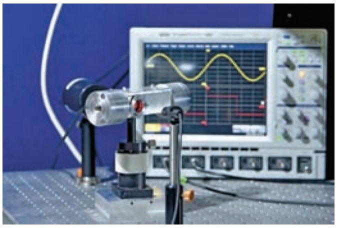


Рис. 7

Графічний спосіб задання функції широко застосовується при дослідженні реальних процесів. Існують прилади, які видають оброблену інформацію у вигляді графіків. Так, у медицині використовують електрокардіограф. Цей прилад рисує криві, які характеризують роботу серця.



Осцилограф

Електрокардіограф

На рисунку 8 зображено графік деякої функції $y = f(x)$.

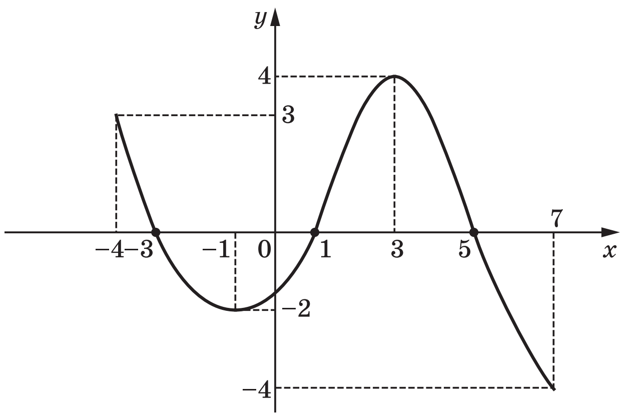


Рис. 8

Її областю визначення є проміжок $[-4; 7]$, а областю значень — проміжок $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значення функції дорівнює нулю.

Означення. Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції.

Так, числа −3, 1, 5 є нулями даної функції.

Зауважимо, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — під віссю абсцис. Це означає, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ функція набуває додатних значень, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — від'ємних.

Означення. Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції.

Наприклад, проміжки $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$ є проміжками знакосталості функції $y = x^2$.

Зауваження. Під час пошуку проміжків знакосталості функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини. Наприклад, проміжок $(-2;\ -1)$ є проміжком знакосталості функції f (рис. 8), але до відповіді увійде проміжок $(-3;\ 1)$, який містить проміжок $(-2;\ -1)$.

Якщо переміщатися по осі абсцис від -4 до -1, то можна помітити, що графік функції йде вниз, тобто значення функції зменшуються. Кажуть, що на проміжку $[-4;\ -1]$ **функція спадає**. Із збільшенням x від -1 до 3 графік функції йде вгору, тобто значення функції збільшуються. Кажуть, що на проміжку $[-1;\ 3]$ **функція зростає**.

Означення. **Функцію f називають зростаючою на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.**

Означення. **Функцію f називають спадною на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.**

Часто використовують коротше формулювання.

Означення. **Функцію f називають зростаючою (спадною) на множині M, якщо для будь-яких значень аргументу з цієї множини більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.**

Наприклад, функція $y = x^2 - 2x$ (рис. 9) спадає на множині $(-\infty;\ 1]$ і зростає на множині $[1;\ +\infty)$. Також кажуть, що проміжок $(-\infty;\ 1]$ є **проміжком спадання**, а проміжок $[1;\ +\infty)$ є **проміжком зростання** функції $y = x^2 - 2x$.

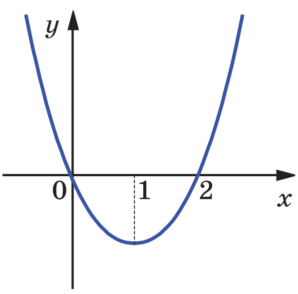


Рис. 9

У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції прийнято вказувати проміжки максимальної довжини.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають **зростаючою**. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають **спадною**.

Наприклад, на рисунку 10 зображено графік функції $y=\sqrt{x}$. Ця функція є зростаючою. На рисунку 11 зображено графік спадної функції $y = -x$.

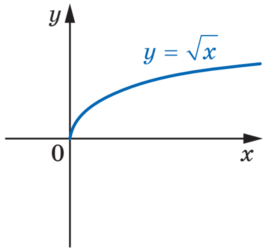


Рис. 10

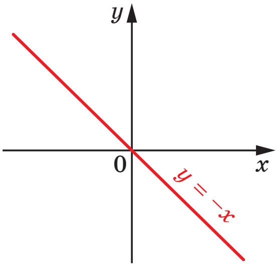


Рис. 11

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x)=\frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(0;\ +\infty)$, причому $x_1 < x_2$. Тоді за властивістю числових нерівностей $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Отже, дана функція спадає на проміжку $(0;\ +\infty)$.

Аналогічно доводять, що функція f спадає на проміжку $(-\infty;\ 0)$.

Зауважимо, що не можна стверджувати, що дана функція спадає на всій області визначення $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, тобто є спадною. Дійсно, якщо, наприклад, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то з нерівності $x_1 < x_2$ не випливає, що $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ є зростаючою при $k > 0$ і спадною при $k < 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу, причому $x_1 < x_2$.

Маємо:

$$f(x_1) - f(x_2) = (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2).$$

Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$.

Якщо $k > 0$, то $k(x_1 - x_2) < 0$, тобто $f(x_1) < f(x_2)$. Отже, при $k > 0$ дана функція є зростаючою.

Якщо $k < 0$, то $k(x_1 - x_2) > 0$, тобто $f(x_1) > f(x_2)$. Отже, при $k < 0$ дана функція є спадною.

Нехай у множині $M \subset D(f)$ існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$. У такому випадку говорять, що число $f(x_0)$ — **найбільше значення функції f на множині M**, і записують $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$, то число $f(x_0)$ називають **найменшим значенням функції f на множині M** і записують $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ і множини $M = [0; 4]$ маємо: $\min\limits_{[0;4]} f(x) = \min\limits_{[0;4]} \sqrt{x} = f(0) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = f(4) = 2$ (рис. 12).

Для $f(x) = |x|$ і множини $M = [-1; 2]$ маємо: $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = f(0) = 0$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 2$ (рис. 13).

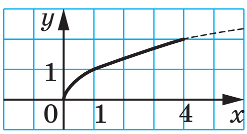


Рис. 12

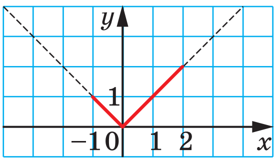


Рис. 13

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M$, то число c є і найбільшим, і найменшим значенням функції f на множині M.

Не будь-яка функція на заданій множині $M \subset D(f)$ має найменше або найбільше значення. Так, для функції $f(x) = x^2$ маємо $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$. Найбільшого значення на множині $\mathbb{R}$ ця функція не має.

Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множині $M = (0; +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

Часто для знаходження найбільшого і найменшого значень функції зручно користуватися таким очевидним фактом:

- якщо функція f зростає на проміжку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ (рис. 14);
- якщо функція f спадає на проміжку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ (рис. 15).

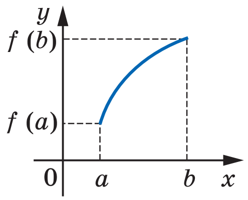


Рис. 14

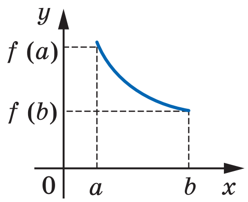


Рис. 15

?

1. Що таке функція?
2. Що називають аргументом функції?
3. Що називають областю визначення функції?
4. Що називають значенням функції?
5. Що називають областю значень функції?
6. Що треба вказати, щоб функція вважалася заданою?
7. Які способи задання функції ви знаєте?
8. Що вважають областю визначення функції, якщо вона задана формулою і при цьому не вказано область визначення?
9. Що називають графіком числової функції?
10. Яке значення аргументу називають нулем функції?
11. Поясніть, що називають проміжком знакосталості функції.
12. Яку функцію називають зростаючою на множині?
13. Яку функцію називають спадною на множині?
14. Яку функцію називають зростаючою?
15. Яку функцію називають спадною?
16. Поясніть, що називають найбільшим (найменшим) значенням функції на множині.
17. Як записують, що число $f(x_0)$ є найбільшим (найменшим) значенням функції f на множині M?

Вправи

46.° Функцію задано формулою $f(x) = -3x^2 + 2x$.

1) Знайдіть: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f(-2)$.

2) Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 0; −1; −56.

3) Чи є правильною рівність: $f(-1) = 5$; $f(2) = -8$?

47.° Функцію задано формулою $f(x) = \frac{18}{x-3}$.

1) Знайдіть: $f(4)$; $f(0)$; $f(9)$; $f(-3)$.
2) Знайдіть значення x, при якому: $f(x) = 9$; $f(x) = 0{,}5$; $f(x) = -10$.

48.° Кожному натуральному числу, більшому за 15, але меншому від 25, поставили у відповідність остачу від ділення цього числа на 4.

1) Яким способом задано цю функцію?
2) Яка область значень цієї функції?
3) Задайте дану функцію таблично.

49.° Функцію задано формулою $y = \sqrt{x+2}$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	2		−1,75	
y		5		0,4

50.° Функцію задано формулою $y = -0{,}5x + 3$. Заповніть таблицю відповідних значень x і y:

x	−4		1,2	
y		2		−5

51.° Укажіть на рисунку 16 фігуру, яка не може слугувати графіком функції.

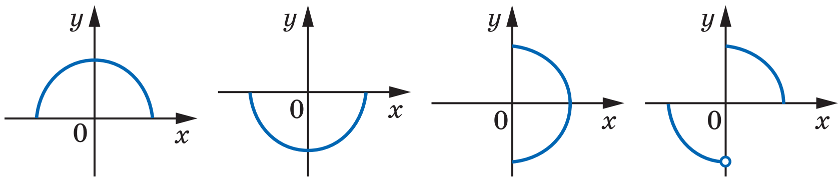


Рис. 16

52.° На рисунку 17 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) значення x, при яких $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 2$;
3) область значень функції;
4) нулі функції;
5) проміжки знакосталості функції;
6) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
7) найбільше і найменше значення функції на проміжку: *а*) $[1; 2]$; *б*) $[-2{,}5; 1]$; *в*) $[-2{,}5; 3{,}5]$.

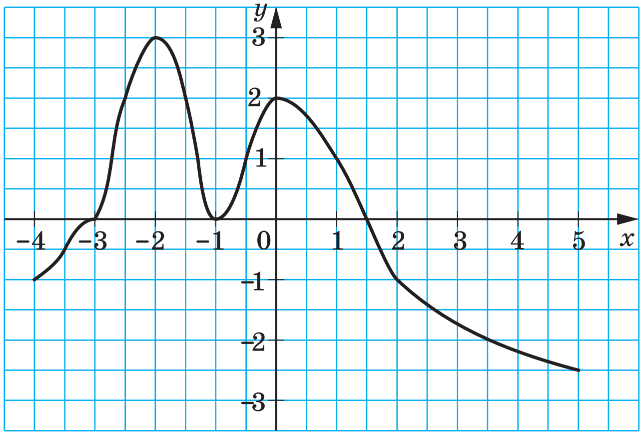


Рис. 17

53.° На рисунку 18 зображено графік функції $y = g(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2{,}5)$;
2) значення x, при яких $f(x) = -1$; $f(x) = 2$;
3) область значень функції;
4) нулі функції;
5) проміжки знакосталості функції;
6) проміжки зростання і проміжки спадання функції;
7) найбільше і найменше значення функції на проміжку: *а*) $[-3; -2]$; *б*) $[-3; -1]$; *в*) $[-3; 1]$.

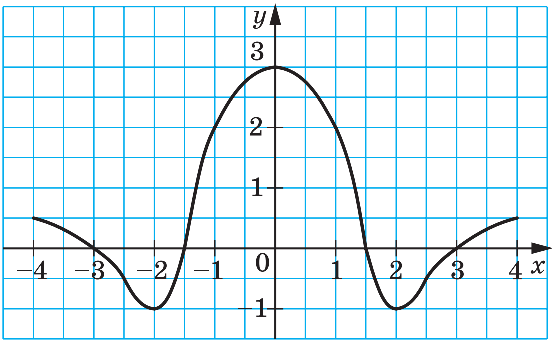


Рис. 18

54.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{9}{x+4}$; 2) $f(x) = \frac{x-6}{4}$;

3) $f(x)=\sqrt{x-7}$;
4) $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt{-x-1}}$;
5) $f(x)=\sqrt{x^2+6x-7}$;
6) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x}$;
7) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$;
8) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{12+4x-x^2}}$;
9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$;
10) $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{-x}$.

55.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$;
2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+9}$;
3) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-5x+4}$;
4) $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5}$;
5) $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}$;
6) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.

56.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x)=\dfrac{1}{7}x-6$;
2) $h(x)=\dfrac{12+3x}{2x-5}$;
3) $g(x)=5-x^2$;
4) $\varphi(x)=\sqrt{x}-2$.

57.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x)=5x^2+x-4$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-8}$.

58.° Знайдіть нулі функції:

1) $f(x)=0{,}4x-8$;
2) $g(x)=28+3x-x^2$;
3) $h(x)=\sqrt{x+4}$;
4) $\varphi(x)=\dfrac{x^2+x-30}{x+5}$;
5) $f(x)=x^3-9x$;
6) $g(x)=x^2+4$.

59.° Знайдіть нулі функції:

1) $f(x)=15-\dfrac{1}{3}x$;
2) $f(x)=5x^2+4x-1$;
3) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$;
4) $f(x)=-4$;
5) $f(x)=\dfrac{5-0{,}2x}{x-2}$;
6) $f(x)=x^2+x$.

60.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y=-7x+3$;
2) $y=x^2-8x+16$;
3) $y=\dfrac{6}{4-x}$;
4) $y=-x^2-1$;
5) $y=3x^2-7x+4$;
6) $y=-2x^2+3x-1$.

61.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y=0{,}6x+12$;
2) $y=\sqrt{x}+3$;
3) $y=9x-x^2$;
4) $y=4x^2-3x-1$.

62.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = 10x - 3$;
2) $y = -3x + 7$;
3) $y = 9 - 2x$;
4) $y = -x$;
5) $y = \frac{1}{5}x$;
6) $y = 2 - 0,6x$?

63.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -2x + 5$;
2) $y = -\frac{1}{3}x$;
3) $y = 2$;
4) $y = -\frac{6}{x}$;
5) $y = x^2 + 2x - 3$;
6) $y = 2x - x^2$.

Користуючись побудованим графіком, знайдіть нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

64.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 3 - \frac{1}{4}x$;
2) $y = \frac{8}{x}$;
3) $y = -x^2 + 4x - 3$;
4) $y = 9 - x^2$.

Користуючись побудованим графіком, знайдіть нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

65.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на множині дійсних чисел, нулями якої є числа: 1) -3 і 4; 2) -2, 0, 3 і 5.

66.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на проміжку $[-6; 5]$, нулями якої є числа -6, 2 і 5.

67.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на проміжку $[-5; 4]$, яка:

1) зростає на проміжку $[-5; 1]$ і спадає на проміжку $[1; 4]$;
2) спадає на проміжках $[-5; -1]$ і $[2; 4]$ та зростає на проміжку $[-1; 2]$.

68.° Накресліть графік якої-небудь функції, визначеної на множині дійсних чисел, яка зростає на проміжках $(-\infty; -2]$ і $[0; 3]$ та спадає на проміжках $[-2; 0]$ і $[3; +\infty)$.

69.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}$;
2) $f(x) = \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+3x+2}$;
3) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$;
4) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3} + \sqrt{15+7x-2x^2}$;
5) $f(x) = \sqrt{2x-8} + \sqrt{x^2-8x+7}$;
6) $f(x) = \sqrt{|x|-x}$.

70.• Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{2}{x-4}$;
2) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+5x+4}$;
3) $f(x)=\sqrt{-x}-\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}$;
4) $f(x)=\sqrt{6-x}+\frac{2}{x^2-6x}$.

71.• Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=\sqrt{x}+2$;
2) $f(x)=7-x^2$;
3) $f(x)=-6$;
4) $f(x)=|x|-3$;
5) $f(x)=\sqrt{-x^2}$;
6) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$;
7) $f(x)=x^2+4x+8$;
8) $f(x)=-x^2-2x+5$.

72.• Знайдіть область значень функції:

1) $f(x)=4-\sqrt{x}$;
2) $f(x)=x^2-6x$.

73.• Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел −2 і 3;
2) множина дійсних чисел, не більших за 3;
3) множина дійсних чисел, не менших від −4, крім числа 5;
4) множина, яка складається з одного числа −1.

74.• Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел −1, 0 і 1;
2) множина дійсних чисел, менших від 7;
3) множина дійсних чисел, не менших від 2, крім чисел 5 і 6.

75.• Чи є правильним твердження:

1) будь-яка пряма, паралельна осі ординат, перетинає графік будь-якої функції в одній точці;
2) пряма, паралельна осі абсцис, може не перетинати графік функції;
3) пряма, паралельна осі ординат, не може перетинати графік функції більше ніж в одній точці;
4) існують функції, графік яких симетричний відносно осі ординат;
5) існують функції, графік яких симетричний відносно осі абсцис;
6) існують функції, графік яких симетричний відносно початку координат?

76.• Дано функцію $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ якщо } x<-1, \\ x^2-1, \text{ якщо } x\geqslant -1. \end{cases}$

1) Знайдіть $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$.
2) Побудуйте графік даної функції.
3) Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

77.• Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\begin{cases} x+6, \text{ якщо } x<-2, \\ x^2-x-2, \text{ якщо } -2\leqslant x\leqslant 2, \\ 2-x, \text{ якщо } x>2; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, \text{ якщо } x\leqslant 0, \\ x^2-2x, \text{ якщо } x>0. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

78.• Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{8}{x}, \text{ якщо } x<-2, \\ 2x^2-4, \text{ якщо } -2\leqslant x\leqslant 2, \\ \dfrac{8}{x}, \text{ якщо } x>2. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання.

79.• На проміжку [2; 5] знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $f(x)=-\dfrac{10}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{10}{x}$.

80.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y=-x^2+6x-7$ на проміжку:

1) [1; 2]; 2) [1; 4]; 3) [4; 5].

81.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y=x^2+2x-8$ на проміжку:

1) [−5; −2]; 2) [−5; 1]; 3) [0; 3].

82.• При яких значеннях a має два нулі функція:

1) $y=x^2+(a-2)x+25$; 2) $y=2x^2+2(a-6)x+a-2$?

83.• При яких значеннях a має не більше одного нуля функція:

1) $y = x^2 + (a - 1)\,x + 1 - a - a^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a$?

84.• Доведіть, що функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$ при $k > 0$ і зростає на кожному з цих проміжків при $k < 0$.

85.• Функція $y = f(x)$ є спадною. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y = \frac{1}{3}f(x)$; 3) $y = -f(x)$?

86.• Функція $y = f(x)$ є зростаючою. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -2f(x)$?

87.•• При якому найменшому цілому значенні m функція $y = 7mx + 6 - 20x$ є зростаючою?

88.•• При яких значеннях k функція $y = kx - 2k + 3 + 6x$ є спадною?

89.•• При яких значеннях b функція $y = 3x^2 - bx + 1$ зростає на множині $[3;\ +\infty)$?

90.•• При яких значеннях b функція $y = bx - 4x^2$ спадає на множині $[-1;\ +\infty)$?

91.•• При яких значеннях c найбільше значення функції $y = -0{,}6x^2 + 18x + c$ дорівнює 2?

92.•• При яких значеннях c найменше значення функції $y = 2x^2 - 12x + c$ дорівнює -3?

93.•• Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$; 4) $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$;

2) $f(x) = \frac{12x + 48}{x^2 + 4x}$; 5) $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2} - \frac{x^2 + 4x}{x}$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 16}$; 6) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.

94.•• Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} - \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; 3) $y = \frac{6x - 18}{x^2 - 3x}$;

2) $f(x) = \frac{2x^2 - x^3}{x}$; 4) $y = \frac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

95.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що функція:

1) $f(x) = \dfrac{4}{x+2}$ спадає на проміжку $(-2; +\infty)$;

2) $f(x) = -x^2 - 8x + 10$ зростає на проміжку $(-\infty; -4]$.

96.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що функція:

1) $f(x) = \dfrac{5}{6-x}$ зростає на проміжку $(-\infty; 6)$;

2) $f(x) = x^2 + 2x$ спадає на проміжку $(-\infty; -1]$.

97.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ є зростаючою.

98.$^{\bullet\bullet}$ Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел, є зростаючою і набуває лише додатних значень. Доведіть, що:

1) функція $y = f^2(x)$ зростає на множині $\mathbb{R}$;

2) функція $y = \dfrac{1}{f(x)}$ спадає на множині $\mathbb{R}$;

3) функція $y = \sqrt{f(x)}$ зростає на множині $\mathbb{R}$.

99.$^{\bullet\bullet}$ Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел, є зростаючою і набуває лише від'ємних значень. Доведіть, що:

1) функція $y = f^2(x)$ спадає на множині $\mathbb{R}$;

2) функція $y = \dfrac{1}{f(x)}$ спадає на множині $\mathbb{R}$.

100.$^{\bullet\bullet}$ Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зростають на деякій множині M. Доведіть, що функція $y = f(x) + g(x)$ зростає на множині M.

101.$^{\bullet\bullet}$ Чи можна стверджувати, що коли функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ зростають на множині M, то функція $y = f(x) - g(x)$ теж зростає на множині M?

102.$^{\bullet\bullet}$ Функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ спадають на деякій множині M і набувають на цій множині від'ємних значень. Доведіть, що функція $y = f(x)\,g(x)$ зростає на множині M.

103.$^{\bullet\bullet}$ Наведіть приклад двох зростаючих на множині M функцій, добуток яких не є зростаючою на цій множині функцією.

104.$^{\bullet\bullet}$ Сума двох чисел дорівнює 8. Знайдіть:

1) якого найбільшого значення може набувати добуток цих чисел;

2) якого найменшого значення може набувати сума квадратів цих чисел.

105.$^{\bullet\bullet}$ Ділянку землі прямокутної форми обгородили парканом завдовжки 200 м. Яку найбільшу площу може мати ця ділянка?

106.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що функція $f(x) = x^2$ не є ні зростаючою, ні спадною на множині $\mathbb{R}$.

Вправи для повторення

107. Обчисліть значення виразу:

1) $(7^3)^2 \cdot 7^{-8}$; 2) $\dfrac{36^{-3}\cdot 6^3}{6^{-5}}$; 3) $\dfrac{625^{-2}\cdot 5^5}{25^{-3}}$; 4) $\dfrac{0{,}125^3\cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$.

108. Знайдіть значення виразу:

1) $18a^2$, якщо $a=-\dfrac{1}{6}$;
3) $16 + b^2$, якщо $b = -2$;
2) $(18a)^2$, якщо $a=-\dfrac{1}{6}$;
4) $(16 + b)^2$, якщо $b = -2$.

109. Доведіть, що при додатних значеннях a і b є правильною нерівність $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$.

110. Не виконуючи обчислення, порівняйте:

1) $(-5{,}8)^2$ і 0;
3) $(-12)^7$ і $(-6)^4$;
5) $(-17)^6$ і 17^6;
2) 0 і $(-3{,}7)^3$;
4) -8^8 і $(-8)^8$;
6) $(-34)^5$ і $(-39)^5$.

4. Парні і непарні функції

Означення. **Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = f(x)$.**

Означення. **Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.**

Очевидно, що функція $y = x^2$ є парною, а функція $y = x^3$ — непарною.

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Таку множину називають **симетричною відносно початку координат.**

З вищенаведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути парною (непарною).

Наприклад, областю визначення функції $y=\dfrac{1}{x-1}$ є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, яка не є симетричною відносно початку координат. Тому ця функція не є ні парною, ні непарною.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - x$ є непарною.

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \mathbb{R}$, то область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$.

Отже, функція f є непарною.

ПРИКЛАД 2 Дослідіть на парність функцію

$$f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}.$$

Розв'язання. Маємо: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Отже, область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1-x} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Отже, функція f є парною.

Теорема 4.1. ***Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.***

Доведення. ⊙ Для доведення теореми достатньо показати, що коли точка $M(a; b)$ належить графіку парної функції, то точка $M_1(-a; b)$ також належить її графіку.

Якщо точка $M(a; b)$ належить графіку функції f, то $f(a) = b$. Оскільки функція f є парною, то $f(-a) = f(a) = b$. Це означає, що точка $M_1(-a; b)$ також належить графіку функції f (рис. 19). ▲

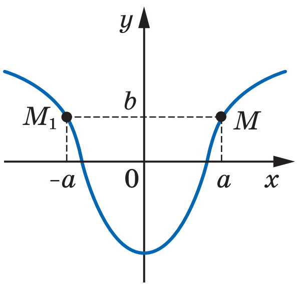


Рис. 19

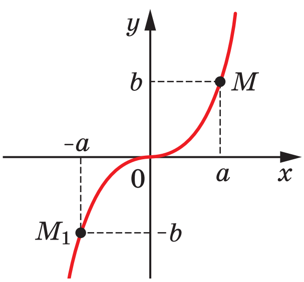


Рис. 20

Теорема 4.2. ***Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.***

Доведіть цю теорему самостійно (рис. 20).

Очевидно, що функція $y = 0$, у якої $D(y) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною. Можна показати, що інших функцій з областю визначення $\mathbb{R}$, які є одночасно і парними, і непарними, не існує.

1. Яку функцію називають парною?
2. Яку функцію називають непарною?
3. Яку множину називають симетричною відносно початку координат?
4. Сформулюйте властивість графіка парної функції.
5. Сформулюйте властивість графіка непарної функції.

Вправи

111.° Відомо, що $f(7) = -16$. Знайдіть $f(-7)$, якщо функція f є: 1) парною; 2) непарною.

112.° Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\,f(-5) = -2$; 3) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

113.° Функція f є парною. Чи обов'язково виконується рівність $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 1$?

114.° Функція f є непарною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\,f(-2) = 3$; 3) $\dfrac{f(-2)}{f(2)} = 0$?

115.° Чи є парною функція, задана формулою $y = x^2$, якщо її область визначення є множина:

1) $[-9; 9]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 3) $[-6; 6)$; 4) $(-\infty; 4]$?

116.• Доведіть, що є парною функція:

1) $f(x) = 171$;
2) $f(x) = -5x^4$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$;
4) $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$;
5) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$;
6) $f(x) = (x+2)\,|x-4| - (x-2)\,|x+4|$.

117.• Доведіть, що є парною функція:

1) $f(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$ і n — парне;
2) $f(x) = -3x^2 + |x| - 1$;
3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{x^2 + 3x + 5}$;
4) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$;
5) $f(x) = \dfrac{|5x-2| + |5x+2|}{x^2 - 1}$;
6) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^7} - \dfrac{1}{(3x+1)^7}$.

118.$^{\bullet}$ Доведіть, що є непарною функція:

1) $f(x) = 4x^7$;
2) $f(x) = 2x - 3x^5$;
3) $f(x) = x\,|\,x\,|$;
4) $f(x) = (5 - x)^5 - (5 + x)^5$;
5) $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}$;
6) $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2-x+1} + \dfrac{3x-2}{x^2+x+1}$.

119.$^{\bullet}$ Доведіть, що є непарною функція:

1) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$;
2) $f(x) = (x^3 + x)(x^4 - x^2)$;
3) $g(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$ і n — непарне;
4) $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$;
5) $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}$;
6) $g(x) = \dfrac{|4x-1| - |4x+1|}{x^4-1}$.

120.$^{\bullet}$ Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \dfrac{x}{x}$;
2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-1}$;
3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$;
4) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$;
6) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{x^3-x}$.

121.$^{\bullet}$ Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 4$;
2) $f(x) = \dfrac{6x^3}{x^2-9}$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{x^3-2x}$;
5) $f(x) = \dfrac{x^2+6x}{2x+12}$;
6) $f(x) = |x-1| - 2|x| + |x+1|$.

122.$^{\bullet}$ Парною чи непарною є функція, графік якої зображено на рисунку 21?

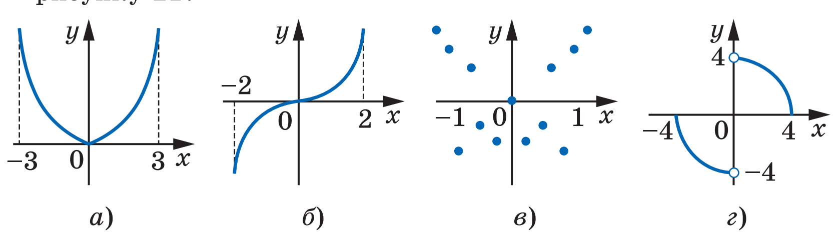


Рис. 21

123.• На рисунку 22 зображено частину графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-5; 5]$. Добудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

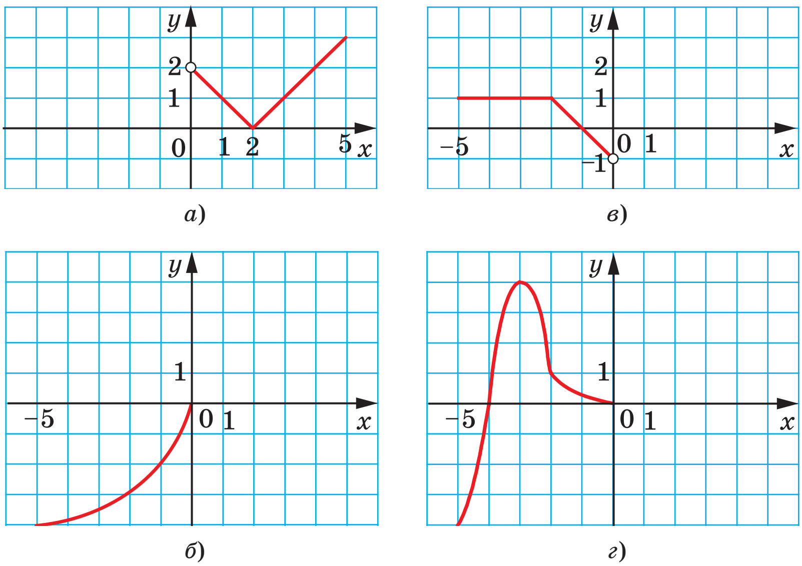


Рис. 22

124.• Ламана $ABCD$, де $A\ (0;\ 0)$, $B\ (2;\ -2)$, $C\ (3;\ 4)$, $D\ (6;\ 1)$, є частиною графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-6; 6]$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

125.• Про функцію f, яка визначена на множині $\mathbb{R}$, відомо, що $f(x) = x^2 - 4x$ при $x \geqslant 0$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

126.• Про функцію f, яка визначена на множині $\mathbb{R}$, відомо, що $f(x) = -0{,}5x^2$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$ і $f(x) = -\frac{4}{x}$ при $x > 2$. Побудуйте графік цієї функції, якщо вона є: 1) парною; 2) непарною.

127.•• Непарна функція f така, що $0 \in D(f)$. Знайдіть $f(0)$.

128.•• Непарна функція f має 4 нулі. Доведіть, що $0 \notin D(f)$.

129.•• Непарна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

130.•• Парна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

131.•• Область визначення функції f симетрична відносно початку координат. Доведіть, що функція $g(x) = f(x) + f(-x)$ є парною, а функція $h(x) = f(x) - f(-x)$ є непарною.

132.•• Областю визначення парних функцій f і g є множина M. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\,g(x)$.

133.•• Областю визначення парної функції f і непарної функції g є множина M. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\,g(x)$.

134.•• Областю визначення непарних функцій f і g є множина M. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = f(x) + g(x)$; 2) $y = f(x) - g(x)$; 3) $y = f(x)\,g(x)$.

135.•• Непарні функції f і g такі, що функція $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

136.•• Одна з функцій, f або g, є парною, інша — непарною. Відомо, що $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

137.•• Чи існує функція, визначена на множині $\mathbb{R}$, яка одночасно є:

1) непарною і зростаючою;
2) непарною і спадною;
3) парною і зростаючою?

138.•• Парна функція f, визначена на множині $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty; 0]$.

139.•• Непарна функція f, визначена на множині $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty; 0]$.

140.•• Функція f є парною і $\min\limits_{[1;3]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[1;3]} f(x) = 5$. Знайдіть $\min\limits_{[-3;-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;-1]} f(x)$.

141.•• Функція f є непарною і $\min\limits_{[2;5]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[2;5]} f(x) = 3$. Знайдіть $\min\limits_{[-5;-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;-2]} f(x)$.

Вправи для повторення

142. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y - 7x = 3, \\ x^2 + 6xy - y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 100, \\ y + x = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y + xy = -15, \\ x^2y + xy^2 = -54. \end{cases}$

143. З двох селищ, відстань між якими дорівнює 66 км, виїхали одночасно назустріч один одному два велосипедисти і зустрілися через 3 год. Знайдіть швидкість руху кожного велосипедиста, якщо один з них витрачає на весь шлях з одного селища в інше на 1 год 6 хв більше за другого.

5. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

У 9 класі ви навчилися за допомогою графіка функції $y = f(x)$ будувати графіки функцій $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = kf(x)$. Нагадаємо правила, які дозволяють виконати такі побудови.

Графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$.

На рисунках 23, 24 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = x^2 - 4$ і $y=\sqrt{x}+3$.

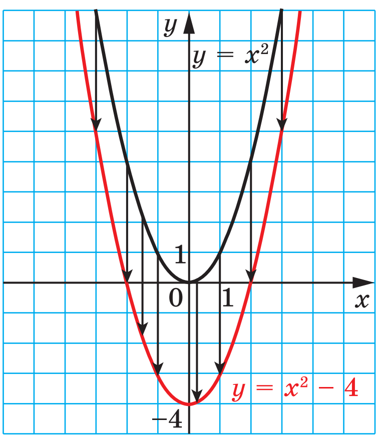


Рис. 23

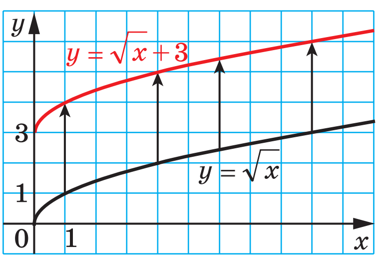


Рис. 24

Графік функції $y = f(x + a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.

На рисунках 25, 26 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = (x - 2)^2$ і $y = \sqrt{x+3}$.

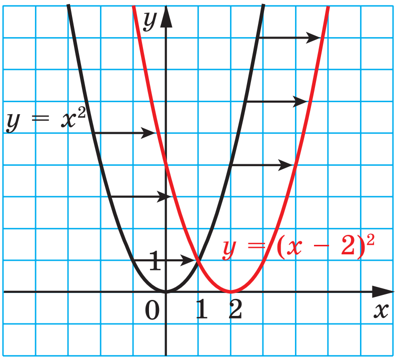


Рис. 25

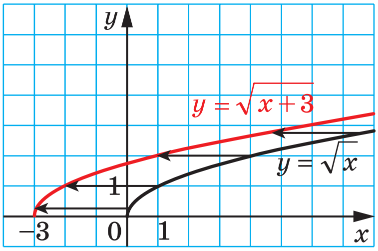


Рис. 26

Графік функції $y = kf(x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на k.

На рисунках 27, 28, 29 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$, $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ і $y = -2\sqrt{x}$.

Кажуть, що графік функції $y = kf(x)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **розтягу в k разів від осі абсцис**, якщо $k > 1$, або в результаті **стиску в $\frac{1}{k}$ разів до осі абсцис**, якщо $0 < k < 1$.

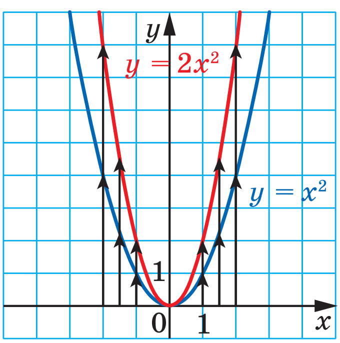


Рис. 27

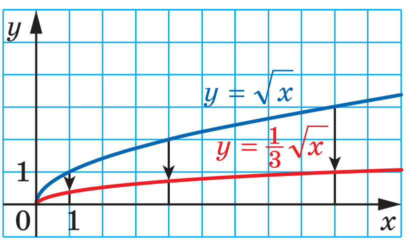


Рис. 28

Покажемо, як можна побудувати графік функції $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Якщо точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ належить графіку функції $y = f(kx)$. Справді, при $x = \frac{x_0}{k}$ маємо:

$$f(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0.$$

Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ графіка функції $y = f(kx)$. Аналогічно можна показати (зробіть це самостійно), що кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(kx)$ є відповідною єдиній точці $(kx_1; y_1)$ графіка функції $y = f(x)$.

Тому ***графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою ординатою і абсцисою, поділеною на k.***

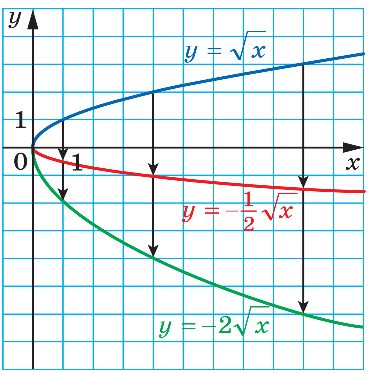


Рис. 29

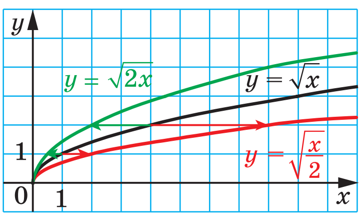


Рис. 30

На рисунку 30 показано, як працює це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{2x}$ і $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

Говорять, що графік функції $y = f(kx)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **стиску в k разів до осі ординат**, якщо $k > 1$, або в результаті **розтягу в $\frac{1}{k}$ разів від осі ординат**, якщо $0 < k < 1$.

Покажемо, як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Зазначимо, що коли точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(-x)$. Дійсно, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Тоді всі точки графіка функції $y = f(-x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку, симетричну їй відносно осі ординат, тобто відобразивши графік функції $y = f(x)$ симетрично відносно осі ординат.

На рисунку 31 показано, як за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ побудовано графік функції $y=\sqrt{-x}$.

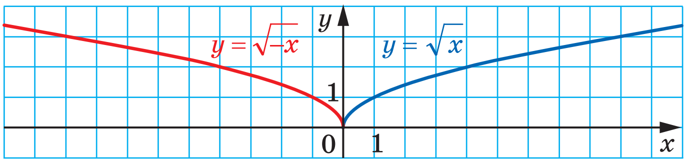


Рис. 31

З огляду на сказане стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k < 0$, аналогічне випадку, коли $k > 0$. Наприклад, на рисунку 32 показано, як можна за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ побудувати графіки функцій $y=\sqrt{-3x}$ і $y=\sqrt{-\frac{x}{2}}$.

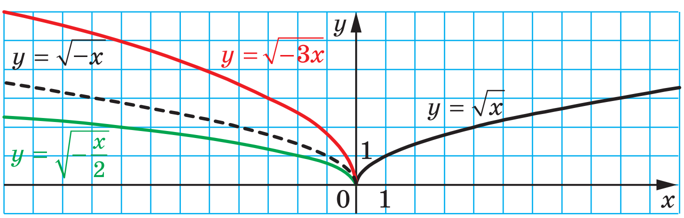
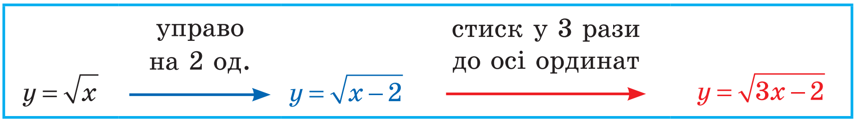


Рис. 32

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{3x-2}$.

Розв'язання. Схема побудови має такий вигляд (рис. 33):



Якщо задану функцію подати у вигляді $y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$, то побудову графіка можна вести і за такою схемою (рис. 34):

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow[\text{до осі ординат}]{\text{стиск у 3 рази}} y=\sqrt{3x} \xrightarrow{\text{управо на } \frac{2}{3} \text{ од.}} y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$$

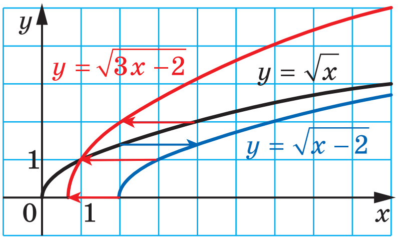


Рис. 33

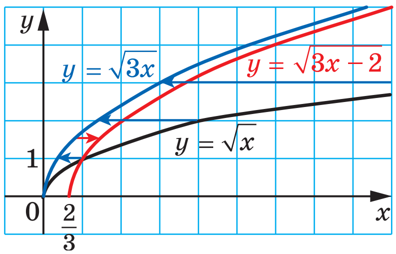


Рис. 34

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{1-3x}$.

Розв'язання. Побудову графіка можна вести за такою схемою (рис. 35):

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y=\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-x+1} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{-3x+1}$$

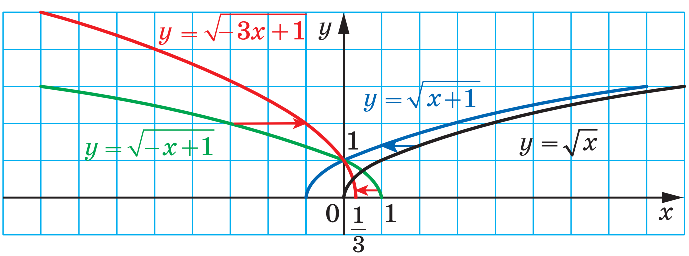


Рис. 35

Зауважимо, що можливі й інші схеми розв'язування цієї задачі, наприклад, так (рис. 36):

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y=\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{стиск у 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-3x+1}$$

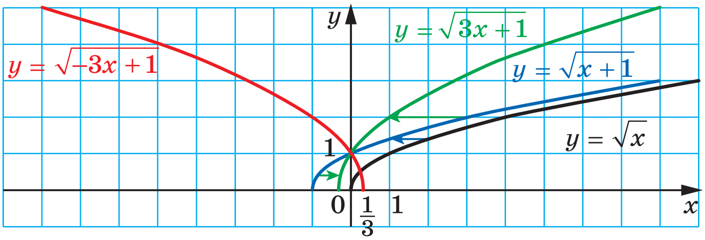


Рис. 36

1. Як можна отримати графік функції $y = f(x) + b$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?

2. Як можна отримати графік функції у $= f(x + a)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?

3. Як можна отримати графік функції $y = kf(x)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?

4. Як можна отримати графік функції $y = f(kx)$, де $k \neq 0$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?

Вправи

144.° Графік якої функції отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо:
1) на 5 одиниць угору;
2) на 8 одиниць управо;
3) на 10 одиниць униз;
4) на 6 одиниць уліво;
5) на 3 одиниці вправо і на 2 одиниці вниз;
6) на 1 одиницю вліво і на 1 одиницю вгору?

145.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 4 одиниці вправо:
1) $y = x^2 + 4$; 2) $y = x^2 - 4$; 3) $y = (x + 4)^2$; 4) $y = (x - 4)^2$?

146.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ на 5 одиниць угору:
1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = (x + 5)^2$; 4) $y = (x - 5)^2$?

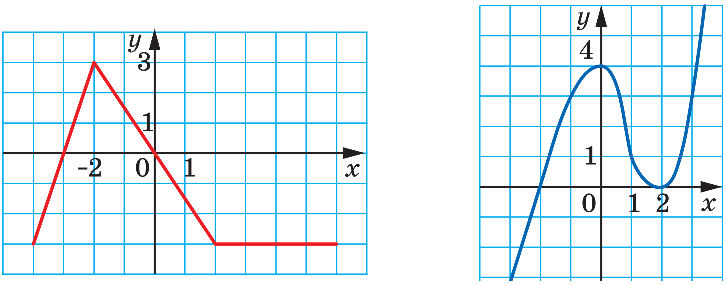
147.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \frac{5}{x}$, щоб отримати графік функції $y = \frac{5}{x-8}$:
1) на 8 одиниць угору;
2) на 8 одиниць униз;
3) на 8 одиниць управо;
4) на 8 одиниць уліво?

148.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \sqrt{x}$, щоб отримати графік функції $y = \sqrt{x + 3}$:

1) на 3 одиниці вгору;
2) на 3 одиниці вниз;
3) на 3 одиниці вправо;
4) на 3 одиниці вліво?

149.° На рисунку 37 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(x) - 2$;
2) $y = f(x) + 4$;
3) $y = f(x - 3)$;
4) $y = f(x + 1)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = 3 - f(x)$.



а) *б)*

Рис. 37

150.° На рисунку 38 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$.

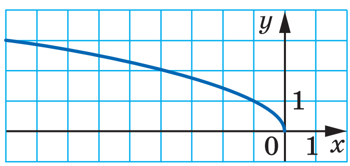


Рис. 38

151.° Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 3$;
2) $y = x^2 + 4$;
3) $y = (x - 5)^2$;
4) $y = (x + 2)^2$;
5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

152.° Побудуйте графік функції $y = -x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -x^2 + 1$;
2) $y = -x^2 - 2$;
3) $y = -(x - 2)^2$;
4) $y = -(x + 4)^2$;
5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

153.• Побудуйте графік функції $y=-\frac{6}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y=-\frac{6}{x}+5$; 2) $y=-\frac{6}{x-2}$; 3) $y=-\frac{6}{x+4}-2$.

154.• Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{x}-4$; 2) $y=\sqrt{x-4}$; 3) $y=\sqrt{x-1}+3$.

155.• Побудуйте графік функції $y=\frac{2}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{2}{x}-1$; 2) $y=\frac{2}{x+1}$; 3) $y=\frac{2}{x-3}+6$.

156.• Задайте дану функцію формулою виду $y = a(x - m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$; 3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$; 4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

157.• Задайте дану функцію формулою виду $y=\frac{k}{x+a}+b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y=\frac{k}{x}$:

1) $y=\frac{3x+8}{x}$; 2) $y=\frac{2x+14}{x+3}$; 3) $y=\frac{-2x}{x-1}$.

158.• Задайте дану функцію формулою виду $y = \frac{k}{x+a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y=\frac{k}{x}$:

1) $y=\frac{4x+14}{x+1}$; 2) $y=\frac{7-x}{x-2}$.

159.• На рисунку 39 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -3f(x)$.

160.• На рисунку 40 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2g(x)$; 2) $y=-\frac{1}{4}g(x)$.

161.• Побудуйте графік функції:

1) $y=0{,}5\sqrt{x}$; 2) $y=-2\sqrt{x-2}$.

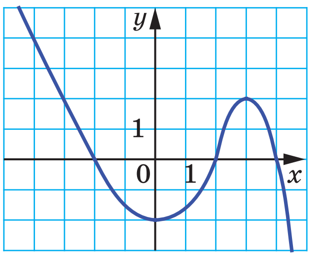


Рис. 39

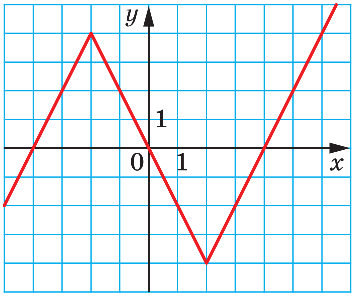


Рис. 40

162.° Побудуйте графік функції:

1) $y=3\sqrt{x}$; 2) $y=-\frac{1}{2}\sqrt{x+4}$.

163.° На рисунку 39 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(2x)$; 2) $y=f\left(\frac{x}{3}\right)$.

164.° На рисунку 40 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y=g\left(\frac{x}{2}\right)$; 2) $y = g(4x)$.

165.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{\frac{x}{3}}$; 2) $y=\sqrt{-2x}$.

166.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3x}$; 2) $y=\sqrt{\frac{x}{4}}$; 3) $y=\sqrt{-\frac{x}{3}}$.

167.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x+1=\sqrt{x+7}$; 2) $2\sqrt{x}=3-x$; 3) $\frac{2}{x-2}=x-3$.

168.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\sqrt{3-x}=0{,}5x$; 2) $\sqrt{x}+2=\frac{12}{x-1}$.

169.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{2x-1}$; 2) $y=\sqrt{3-4x}$; 3) $y=\sqrt{\frac{1}{2}x+2}$.

170.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3x+1}$; 2) $y=\sqrt{5-2x}$.

Вправи для повторення

171. Ціну на деякий товар підвищили на 25%. На скільки відсотків треба знизити нову ціну, щоб вона повернулася до початкового рівня?

172. Було 200 г 8-відсоткового розчину солі. Через деякий час 40 г води випарували. Яким став відсотковий вміст солі в розчині?

173. До сплаву міді і цинку, який містив 12 кг міді, додали 2 кг цинку, після чого відсотковий вміст цинку у сплаві збільшився на $8\frac{1}{3}\%$. Скільки кілограмів цинку було в сплаві спочатку?

Готуємося до вивчення нової теми

174. Виразіть:

1) з рівності $y=\frac{x+7}{3}$ змінну x через змінну y;

2) з рівності $y=\frac{10}{x-2}+6$ змінну x через змінну y;

3) з рівності $y=\frac{\sqrt{x+2}}{5}-1$ змінну x через змінну y;

4) з рівності $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ змінну b через змінні a і c.

Як побудувати графіки функцій $y = f(|x|)$ і $y = |f(x)|$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Скориставшись означенням модуля, запишемо:

$$y=f(|x|)=\begin{cases} f(x), & \text{якщо } x\geqslant 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x<0. \end{cases}$$

Звідси можна зробити висновок, що графік функції $y = f(|x|)$ при $x \geqslant 0$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при $x < 0$ — з графіком функції $y = f(-x)$.

Тоді побудову графіка функції $y = f(|x|)$ можна проводити за такою схемою:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;
2) побудувати ту частину графіка функції $y = f(-x)$, усі точки якої мають від'ємні абсциси.

Об'єднання цих двох частин і складатиме графік функції $y = f(|x|)$.

Фактично це означає, що слід побудувати графік функції $y = f(x)$ для $x \geqslant 0$, а потім відобразити його симетрично відносно оси ординат.

На рисунку 41 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x-2)^2$ побудовано графік функції $y = (|x|-2)^2$.

Для функції $y = |f(x)|$ можна записати:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x, для яких $f(x) \geqslant 0$, збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при всіх x, для яких $f(x) < 0$, — з графіком функції $y = -f(x)$.

Тоді будувати графік функції $y = |f(x)|$ можна за такою схемою:

1) усі точки графіка функції $y = f(x)$ з невід'ємними ординатами залишити незмінними;

2) точки з від'ємними ординатами замінити на точки з тими самими абсцисами, але протилежними ординатами, тобто частину графіка $y = f(x)$, розміщену нижче від осі абсцис, відобразити симетрично відносно осі абсцис.

На рисунку 42 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x-1)^2 - 2$ побудовано графік функції $y = |(x-1)^2 - 2|$.

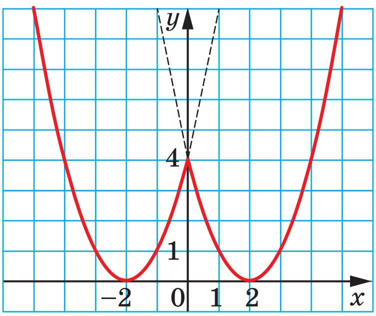


Рис. 41

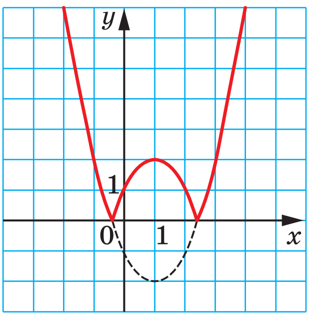
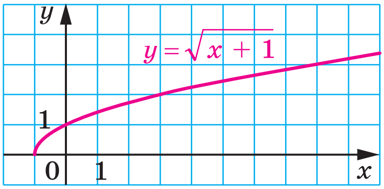


Рис. 42

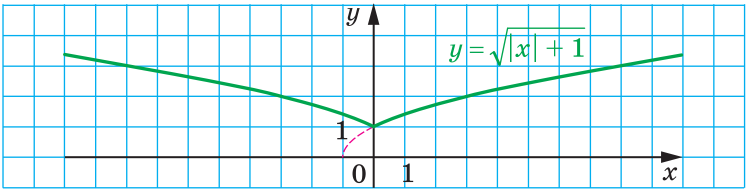
ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$.

Розв'язання. Алгоритм побудови шуканого графіка можна подати у вигляді такої схеми (рис. 43):

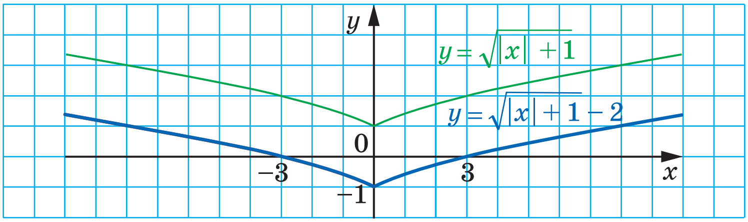
$y=\sqrt{x+1}$ $\xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}}$ $y=\sqrt{|x|+1}$ $\xrightarrow{\text{униз на 2 од.}}$ $y=\sqrt{|x|+1}\copyright 2$ $\xrightarrow{\text{симетрія відносно осі абсцис}}$ $y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$



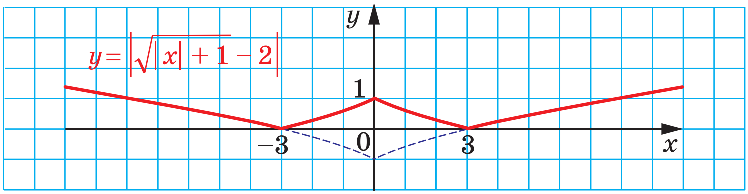
а)



б)



в)



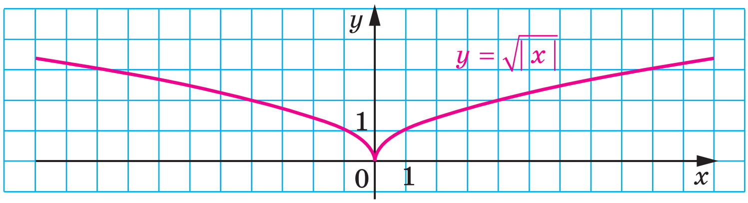
г)

Рис. 43

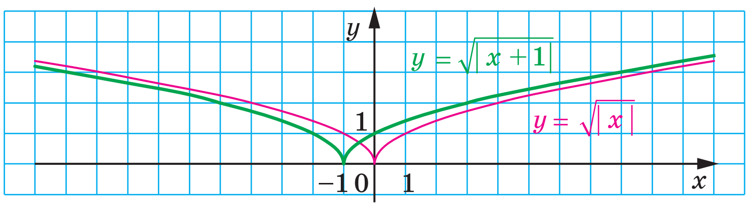
ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|$.

Розв'язання. Побудову шуканого графіка можна подати за такою схемою (рис. 44):

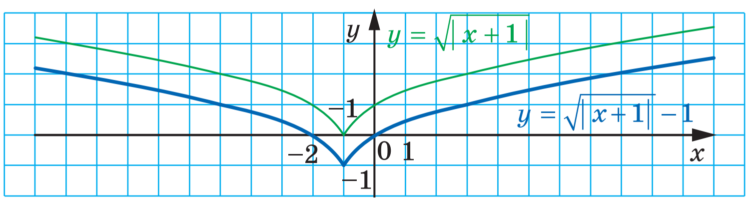
$$y=\sqrt{|x|}\xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}}y=\sqrt{|x+1|}\xrightarrow{\text{униз на 1 од.}}y\ \ \sqrt{|x\ \ 1|}\ \ 1\xrightarrow{\text{симетрія відносно осі абсцис}}y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|$$



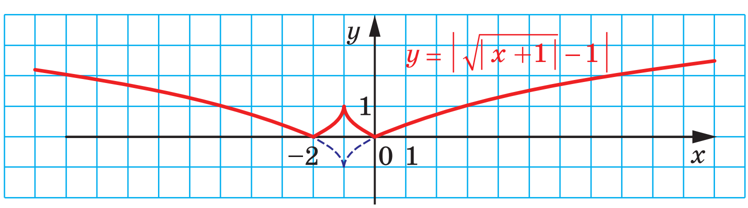
а)



б)



в)



г)

Рис. 44

Вправи

175. Використовуючи графік функції $y = f\,(x)$, зображений на рисунку 45, побудуйте графік функції:

1) $y = f\,(|x|)$;

2) $y = |\,f\,(x)\,|$.

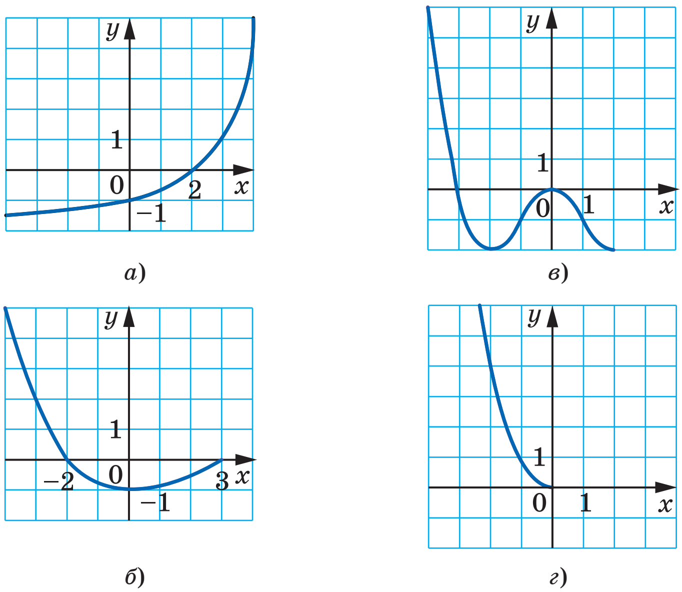


Рис. 45

176. Використовуючи графік функції $y = f\,(x)$, зображений на рисунку 46, побудуйте графік функції $y = |\,f\,(|x|)\,|$.

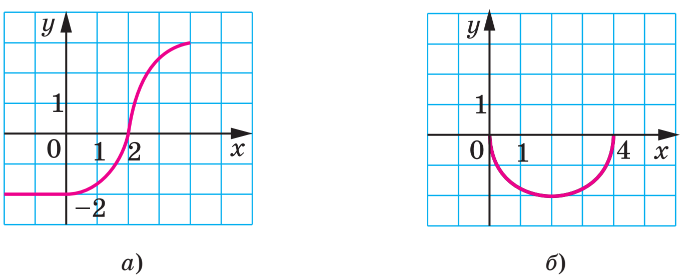


Рис. 46

177. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{1}{|x|}$;

2) $y = -\dfrac{6}{|x|}$.

178. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 1|$; 2) $y = \left|\sqrt{x} - 2\right|$; 3) $y = \left|\frac{2}{x} - 1\right|$; 4) $y = \left|\frac{2}{x-1}\right|$.

179. Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| - 1)^2$; 2) $y = \sqrt{|x| + 2}$; 3) $y = \frac{1}{|x| - 3}$; 4) $y = \sqrt{1 - |x|}$.

180. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{|x + 2|}$;

2) $y = (|x - 2| - 1)^2$;

3) $y = \sqrt{|x - 1| + 2}$;

4) $y = \frac{1}{|x + 1| - 3}$.

6. Обернена функція

На рисунках 47, 48 зображено графіки функцій f і g.

Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції f не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу $y_0 \in E(f)$ відповідає єдине число $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція g такої властивості не має. Справді, з рисунка 48 видно, що значенню y_0 відповідають два значення аргументу x_1 і x_2 такі, що $y_0 = g(x_1)$ і $y_0 = g(x_2)$.

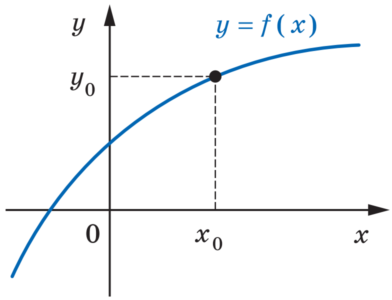


Рис. 47

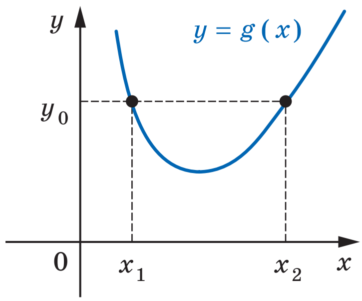


Рис. 48

Означення. **Функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.**

Функція f (рис. 47) є оборотною. Функція g (рис. 48) не є оборотною.

Функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 49).

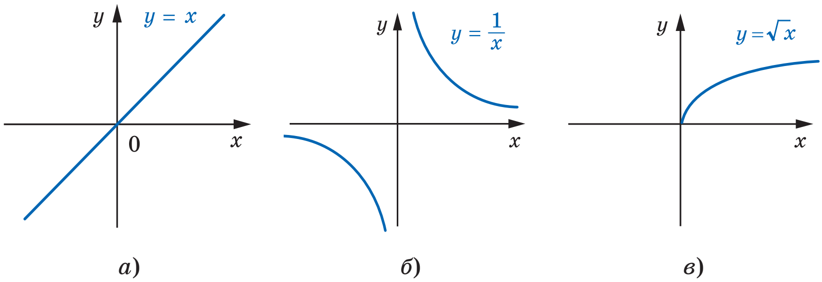


Рис. 49

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

Теорема 6.1. ***Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.***

Доведення. ⊙ Припустимо, що існує зростаюча функція f, яка не є оборотною. Тоді знайдеться $y_0 \in E(f)$, для якого існують x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Разом з тим функція f — зростаюча, і з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядається випадок, коли функція f є спадною. ▲

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблично:

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функція f є оборотною.

Поміняємо рядки таблиці місцями і розглянемо функцію $y = g(x)$, задану отриманою таблицею:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Функції f і g зв'язані такими властивостями:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$, $g(\sqrt{5}) = 5$;

$f(6) = \sqrt{6}$, $g(\sqrt{6}) = 6$;

$f(7) = \sqrt{7}, \quad g\left(\sqrt{7}\right) = 7.$

Ці рівності означають, що коли $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$.

У таких випадках говорять, що функція g є **оберненою** до функції f, а функція f — **оберненою** до функції g. Такі функції f і g називають **взаємно оберненими.**

Означення. Функції f і g називають взаємно оберненими, якщо:
1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;
2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ з рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

Можна показати, що другу умову в означенні можна замінити на таке: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ з рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f(g(x_0)) = x_0$.

Коли функція f не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї. Будь-яка оборотна функція має обернену.

ПРИКЛАД Доведіть, що функція $f(x) = 2x - 1$ є оборотною. Знайдіть обернену функцію.

Розв'язання. Функція $f(x) = 2x - 1$ є зростаючою. Отже, вона є оборотною.

Щоб задати обернену функцію, потрібно вказати правило, яке дає змогу за кожним значенням змінної y знайти відповідне значення змінної x таке, що $y = 2x - 1$.

Маємо: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Отримана рівність задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Традиційно незалежну змінну позначають буквою x, а залежну — буквою y. Дотримуючись таких позначень, можна сказати, що ми отримали функцію, яка задається формулою $y = \frac{x+1}{2}$.

Покажемо, що функції $g(x) = \frac{x+1}{2}$ і $f(x) = 2x - 1$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Маємо: $g(y_0) = \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0$.

Функція $f(x) = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $f(x) = x^2$ є **оборотною на множині** $[0; +\infty)$. Знайдемо обернену функцію.

Маємо: $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$. Звідси $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Скориставшись традиційними позначеннями, отримаємо функцію $y = \sqrt{x}$.

Покажемо, що функції $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, і $g(x) = \sqrt{x}$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$, $E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = x_0^2$, де $x_0 \geqslant 0$. Запишемо $g(y_0) = \sqrt{y_0} = \sqrt{x_0^2} = |x_0| = x_0$.

Теорема 6.2. ***Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої*** $\boldsymbol{y = x}$.

Доведення. Нехай точка $M(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Тоді $b = f(a)$. Якщо функція g обернена до функції f, то $g(b) = a$, тобто точка $N(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$.

Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$.

Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються і належать прямій $y = x$.

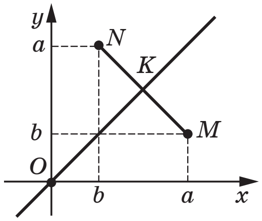


Рис. 50

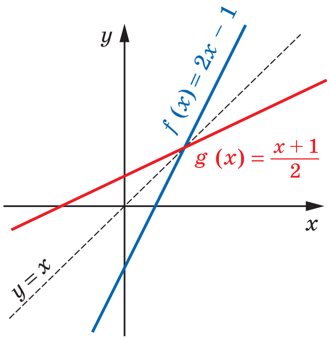
При $a \neq b$ маємо (рис. 50): $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, тобто точка O рівновіддалена від кінців відрізка MN, а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Середина K відрізка MN має координати $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y = x$. Отже, пряма $y = x$ і є серединним перпендикуляром відрізка MN. ▲

Доведену теорему ілюструють графіки взаємно обернених функцій, що розглядалися вище (рис. 51).

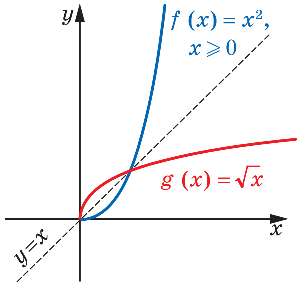
Теорема 6.3. ***Якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена функція g є також зростаючою (спадною).***

Доведення. Припустимо, що функція f — зростаюча і при цьому обернена до неї функція g не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливатиме нерівність $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$. Отримуємо, що $x_1 \geqslant x_2$. Оскільки функція f — зростаюча, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, тобто $y_1 \geqslant y_2$. Отримали суперечність.

Для спадної функції міркуємо аналогічно. ▲



а)



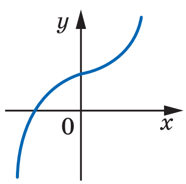
б)

Рис. 51

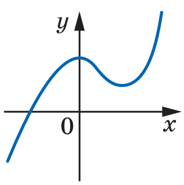
1. Яку функцію називають оборотною?
2. Сформулюйте теорему про оборотність зростаючої (спадної) функції.
3. Як пов'язані область визначення функції та область значень оберненої до неї функції?
4. Як пов'язані область значень функції та область визначення оберненої до неї функції?
5. Які дві функції називають взаємно оберненими?
6. Як розташовані графіки взаємно обернених функцій?
7. Якою є функція, обернена до зростаючої функції? до спадної функції?

Вправи

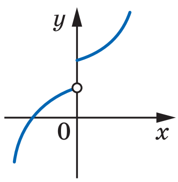
181.° **Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 52, є оборотними?**



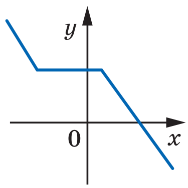
а)



б)



в)



г)

Рис. 52

182.° Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 53, є оборотними?

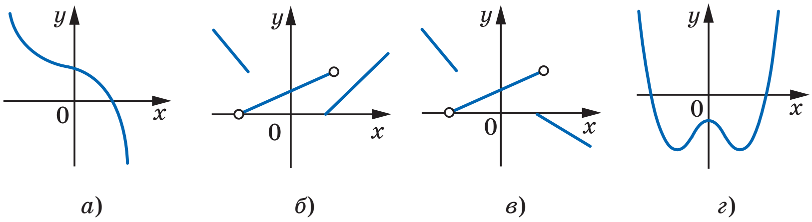


Рис. 53

183.° Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$.

184.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{1}{2x+1}$; 4) $y = \frac{1}{3}x + 4$.

185.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 0{,}2x + 3$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$; 3) $y = \frac{4}{x+2}$; 4) $y = 4x - 5$.

186.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{x}{x-1}$; 3) $y = 2\sqrt{x} - 1$; 5) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

2) $y = \sqrt{2x-1}$; 4) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty; 0]$;

187.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{x+2}{x}$; 3) $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $D(y) = [2; +\infty)$.

2) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

188.• Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

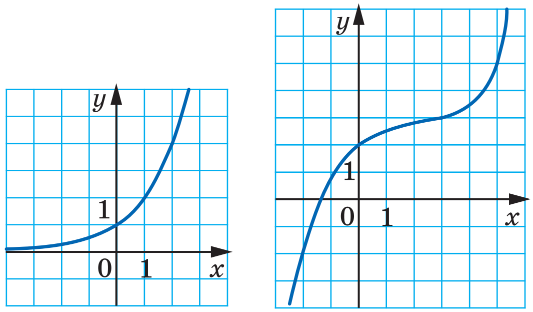
1) $y = -0{,}5x + 2$; 2) $y = \sqrt{x+1}$; 3) $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ 2x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

189.• Побудуйте в одній системі координат графік даної функції і графік функції, оберненої до неї:

1) $y = 3x - 1$; 3) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

2) $y = x^2 - 4$, якщо $x \geqslant 0$;

190.• Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 54, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.



а) *б*)

Рис. 54

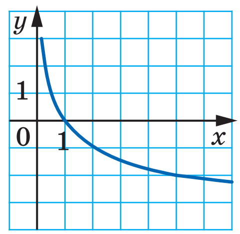


Рис. 55

191.• Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 55, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.

192.•• Доведіть, що функція, обернена до лінійної функції $y = kx + b$ при $k \neq 0$, теж є лінійною.

193.•• Доведіть, що функція, обернена до непарної функції, теж є непарною.

Вправи для повторення

194. Один робітник може виконати деяке виробниче завдання за 20 год, а другий — за 30 год. За який час вони виконають це завдання, працюючи разом?

195. Через першу трубу басейн можна наповнити водою за 9 год, а через другу — за 12 год. Спочатку 3 год була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басейн?

196. Дві бригади, працюючи разом, зорали поле за 8 год. За скільки годин може зорати поле кожна бригада, працюючи самостійно, якщо одній бригаді на це потрібно на 12 год більше, ніж другій?

197. Перша труба може заповнити басейн водою на 24 год швидше, ніж друга. Спочатку відкрили другу трубу, а через 8 год — першу. Через 20 год спільної роботи двох труб було заповнено водою $\frac{2}{3}$ басейну. За скільки годин може заповнити басейн кожна труба, працюючи самостійно?

Львівська математична школа

Підручник Банаха «Курс функціонального аналізу»

Ви тримаєте в руках підручник «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилося нове словосполучення — «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста — математичний аналіз вивчає функції. З цього року ви починаєте знайомство з елементами аналізу; вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їх властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині XX ст. при вивченні певних класів функцій з'явилася нова математична дисципліна, вершина сучасної математики — «функціональний аналіз». Важливу, фактично головну роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30-х рр. XX ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юліуш Шаудер, Гуґо Штейнгауз і багато інших. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як «львівська математична школа». Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.

Сьогодні С. Банаха в усьому світі з цілковитою підставою вважають засновником функціонального аналізу. Один з перших у світі підручників з цієї дисципліни написано самим С. Банахом. Багато результатів С. Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені ним множини одержали назву «простори Банаха» і зараз входять до необхідного мінімуму знань кожного студента-математика, фізика, кібернетика тощо.

Стефан Банах
(1892–1945)

Вручення гусака

Розповідають, що багато теорем львівські математики доводили... у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина С. Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували коли кухлі пива, коли вечерю в ресторані. Так, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Проблеми, поставлені в «Шкотській книзі», вважають настільки важливими і складними, що кожний, кому вдасться розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.

7. Рівносильні рівняння. Рівняння-наслідок. Рівносильні нерівності

Нехай задано дві функції $y = f(x)$ та $y = g(x)$ і поставлено задачу знайти множину значень аргументу x, при яких значення функцій f і g рівні. У такому випадку кажуть, що треба розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$.

Означення. **Областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ називають множину значень змінної x, при яких мають зміст обидві частини рівняння.**

З означення випливає, що областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$ є множина $D(f) \cap D(g)$.

Розглянемо кілька прикладів:

- областю визначення лінійного рівняння, тобто рівняння виду $ax = b$, є множина дійсних чисел;
- областю визначення рівняння $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$ є множина $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$;
- областю визначення рівняння $\frac{x + 3}{|x| - x} = 0$ є множина $(-\infty; 0)$.

Рис. 56

Незважаючи на те що рівняння $x^2 = -2$ не має коренів, його областю визначення є множина дійсних чисел.

Зрозуміло, що кожний корінь рівняння обов'язково належить його області визначення. Цей факт ілюструє діаграма Ейлера (рис. 56). Наприклад, не розв'язуючи рівняння $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$, можна сміливо стверджувати, що число 0 не є його коренем.

Розглянемо два рівняння: $x^2 = 4$ і $|x| = 2$.

Очевидно, що кожне з них має одні й ті самі корені: -2 і 2.

У таких випадках кажуть, що рівняння $x^2 = 4$ і $|x| = 2$ **рівносильні.**

Означення. **Рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають рівносильними, якщо множини їх коренів рівні.**

Наведемо приклади пар рівносильних рівнянь:

$$\frac{1}{2}x = 0 \quad \text{і} \quad 2x = 0;$$

$$x^2 = 1 \quad \text{і} \quad (x - 1)(x + 1) = 0;$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{і} \quad (x^2 + 1)(x - 1) = 0;$$

$$(x - 1)^{100} = 0 \quad \text{і} \quad (x - 1)^{1000} = 0.$$

Множина коренів кожного з рівнянь $x^2 = -5$ і $|x| = -3$ є порожньою, тобто множини коренів цих рівнянь рівні. Отже, за означенням ці рівняння є рівносильними.

Розв'язуючи рівняння, важливо знати, за допомогою яких перетворень можна замінити дане рівняння на рівносильне.

Теорема 7.1. ***Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Теорема 7.2. ***Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Теорема 7.3. ***Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Ви зможете довести теореми 7.1 – 7.3 на заняттях математичного гуртка.

Зауваження. З теорем 7.1 і 7.3 не випливає, що коли до обох частин рівняння додати один і той самий вираз зі змінною або обидві частини помножити на один і той самий вираз зі змінною, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.

Так, якщо до обох частин рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ додати дріб $\frac{1}{5-x}$, то отримаємо рівняння $x^2 = 25$, яке не рівносильне даному.

Означення. **Якщо множина коренів рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x) = g_1(x)$.**

Наприклад, рівняння $x^2 = 25$ є наслідком рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$.

Також говорять, що з рівняння $x^2 - \frac{1}{5-x} = 25 - \frac{1}{5-x}$ **випливає** рівняння $x^2 = 25$.

Рис. 57

На рисунку 57 означення рівняння-наслідку проілюстровано за допомогою діаграми Ейлера.

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то, наприклад, наслідком рівняння $x^2 = -5$ є будь-яке рівняння з однією змінною x.

Зауважимо, що коли два рівняння рівносильні, то кожне з них можна вважати наслідком іншого.

Ті корені рівняння-наслідку, які не є коренями даного рівняння, називають **сторонніми коренями** даного рівняння.

Наприклад, рівняння $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+2) = 0$ є наслідком рівняння $2x - 1 = 0$. Рівняння-наслідок має два корені: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, а рівняння $2x - 1 = 0$ має один корінь $\frac{1}{2}$. У цьому випадку корінь -2 є стороннім коренем рівняння $2x - 1 = 0$.

Розв'язуючи рівняння, треба намагатися побудувати ланцюжок рівносильних рівнянь, щоб урешті-решт отримати рівняння, яке рівносильне даному і корені якого легко знайти.

Проте якщо під час розв'язування рівняння рівносильність не було дотримано і відбувся перехід до рівняння-наслідку, то отримані при цьому сторонні корені, як правило, можна відкинути за допомогою перевірки.

Розв'яжемо рівняння $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$. Прирівнявши чисельник дробу до нуля, отримаємо рівняння $x^2 - 4 = 0$, коренями якого є числа -2 і 2. Проте число -2 не належить області визначення даного рівняння, а число 2 задовольняє дане рівняння і є його єдиним коренем.

Розв'язуючи рівняння $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$, ми перейшли до рівняння-наслідку $x^2 - 4 = 0$, корені якого було перевірено.

При розв'язуванні рівняння важливо розуміти, на якому етапі було порушено рівносильність і що спричинило це порушення.

Так, при переході від рівняння $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ до рівняння $x^2 - 4 = 0$ було розширено область визначення даного рівняння. Тобто, зняття обмеження $x \neq -2$ якраз і призвело до появи стороннього кореня -2.

Означення. Нерівності називають рівносильними, якщо множини їх розв'язків рівні.

Наведемо кілька прикладів.

Нерівності $x^2 \leqslant 0$ і $|x| \leqslant 0$ є рівносильними. Справді, кожна з них має єдиний розв'язок $x = 0$.

Нерівності $x^2 > -1$ і $|x| > -2$ є рівносильними, оскільки множиною розв'язків кожної з них є множина дійсних чисел.

Оскільки кожна з нерівностей $|x| < -1$ і $0x < -3$ розв'язків не має, то вони також є рівносильними.

Розв'язуючи рівняння, ми заміняли його іншим, більш простим рівнянням, але рівносильним даному. За аналогічною схемою розв'язують і нерівності, використовуючи такі правила.

- Якщо до обох частин нерівності додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини нерівності в іншу, замінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме додатне число, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
- Якщо обидві частини нерівності помножити (поділити) на одне й те саме від'ємне число, змінивши при цьому знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.

Означення. Якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу нерівність називають наслідком першої нерівності.

Наприклад, нерівність $x > 2$ є наслідком нерівності $x > 5$ (рис. 58).

Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то будь-яка нерівність з однією змінною є наслідком нерівності, яка не має розв'язків, наприклад нерівності $|x| < 0$.

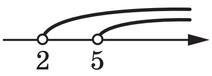


Рис. 58

1. Що називають областю визначення рівняння $f(x) = g(x)$?
2. Які рівняння називають рівносильними?
3. За допомогою яких перетворень рівняння можна отримати рівняння, рівносильне даному?
4. Яке рівняння називають наслідком даного рівняння?
5. Які корені називають сторонніми коренями даного рівняння?
6. Які нерівності називають рівносильними?
7. За допомогою яких перетворень нерівності можна отримати нерівність, рівносильну даній?
8. Яку нерівність називають наслідком даної нерівності?

Вправи

198.° Чи рівносильні рівняння:
1) $x + 2 = 10$ і $3x = 24$;
2) $-2x = -6$ і $\frac{1}{3}x = 1$;
3) $x - 5 = 0$ і $x(x - 5) = 0$;
4) $(3x - 12)(x + 2) = 0$ і $(0,4 - 0,1x)(7x + 14) = 0$;
5) $\frac{6}{x} = 0$ і $x^2 = -4$;
6) $x + 1 = 1 + x$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$;
7) $x^3 = 1$ і $|x| = 1$;
8) $x^{100} = 1$ і $x^{1000} = 1$;
9) $\frac{x}{x} = 1$ і $x = x$;
10) $x^2 + 2x + 1 = 0$ і $x + 1 = 0$;
11) $(x + 1)(x^2 + 1) = 0$ і $x + 1 = 0$;
12) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ і $x - 1 = 0$;
13) $\frac{x^2-9}{x+2} = 0$ і $x^2 - 9 = 0$?

199.° Чи рівносильні рівняння:
1) $x + 6 = 10$ і $2x - 1 = 7$;
2) $x^2 = x$ і $x = 1$;
3) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x + 1) = 0$ і $4x^2 - 1 = 0$;

4) $x^2 + 1 = 0$ і $\frac{3}{x-1} = 0$;

5) $\frac{x+1}{x+1} = 1$ і $\frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$;

6) $\frac{x-2}{x-2} = 0$ і $2x^2 + 3 = 0$;

7) $x^2 + 4x + 4 = 0$ і $\frac{x+2}{x-1} = 0$;

8) $\frac{x^2-9}{x-3} = 0$ і $x + 3 = 0$;

9) $\frac{x+1}{x+1} = 0$ і $\frac{x^2-1}{x^2-1} = 0$?

200.° Складіть рівняння, рівносильне даному:

1) $2x - 3 = 4$;
2) $|x| = 1$;
3) $x + 6 = x - 2$;
4) $\frac{x-1}{x-1} = 0$;
5) $\frac{x-1}{x-1} = 1$.

201.° Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:

1) $4x - 8 = x + 3$ і $4x - x = 8 + 3$;
2) $x^2 - 1 = 3$ і $x^2 + 5 = 9$;
3) $\frac{3x-5}{2} - \frac{x}{6} = 1$ і $9x - 15 - x = 6$;
4) $(2x + 1)(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1)$ і $2x + 1 = 3$.

202.° Чи буде рівняння, отримане в результаті вказаного перетворення, рівносильним даному:

1) у рівнянні $3(2x - 1) - 5(4x + 2) = 1$ розкрити дужки і звести подібні доданки;
2) у рівнянні $x^2 + \frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7} = 49$ різницю $\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x-7}$ замінити на нуль;
3) у рівнянні $\frac{x^2-1}{x-1} + 3x - 5 = 0$ скоротити дріб;
4) обидві частини рівняння $x^3 = x$ поділити на x;
5) обидві частини рівняння $(x + 1)(x^2 + 4) = x^2 + 4$ поділити на $x^2 + 4$;
6) обидві частини рівняння $\frac{x^2}{x} = 2$ помножити на x;
7) обидві частини рівняння $2x + 1 = 5$ помножити на $x + 1$?

203.• Чи рівносильні нерівності:

1) $x + 3 > 6$ і $-4x < -12$;
2) $(x + 2)^2 (x + 1) < 0$ і $x + 1 < 0$;
3) $(x + 2)^2 (x + 1) \leqslant 0$ і $x + 1 \leqslant 0$;
4) $\frac{1}{x} < 1$ і $x > 1$;
5) $x^2 \geqslant x$ і $x \geqslant 1$;
6) $(x + 4)^2 < 0$ і $|x - 2| < 0$?

204.• Чи рівносильні нерівності:

1) $(x - 3)^2 (x + 4) \leqslant 0$ і $x + 4 \leqslant 0$;
2) $(x - 3)^2 (x + 4) < 0$ і $x + 4 < 0$;
3) $\frac{x-2}{x-4} > 0$ і $x - 2 > 0$;
4) $\sqrt{x} \leqslant 0$ і $x^4 \leqslant 0$?

205.• Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

1) $x^2 = x$ і $x = 1$;
2) $\frac{x}{x} = 1$ і $0x = 0$;
3) $x^3 = 1$ і $x^2 = 1$;
4) $|x| = 1$ і $x^3 = 1$;
5) $\frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}$ і $x^2 = 36$;
6) $x^2 = 4$ і $x^2 - \frac{1}{x+2} = 4 - \frac{1}{x+2}$;
7) $\frac{x^2-1}{x+1} = 0$ і $x^2 - 1 = 0$?

206.• Яке з двох рівнянь є наслідком другого:

1) $\frac{x^2}{x} = 1$ і $x^2 = x$;
2) $x^2 + 1 = 1$ і $x(x - 1) = 0$;
3) $\frac{x^2}{x+8} = \frac{64}{x+8}$ і $x^2 = 64$;
4) $x^2 + \frac{1}{x+3} = 9 + \frac{1}{x+3}$ і $x^2 = 9$?

207.• Складіть пару рівносильних рівнянь, кожне з яких:

1) має один корінь;
2) має два корені;
3) має безліч коренів;
4) не має коренів.

208.• Як може змінитися (розширитися чи звузитися) множина коренів заданого рівняння, якщо:

1) рівняння $(|x| + 3)\, f(x) = 2|x| + 6$ замінити на рівняння $f(x) = 2$;
2) рівняння $\frac{f(x)}{x^2+1} = 0$ замінити на рівняння $f(x) = 0$;
3) рівняння $(x + 1)\, f(x) = x + 1$ замінити на рівняння $f(x) = 1$;
4) рівняння $\frac{f(x)}{x+1} = \frac{g(x)}{x+1}$ замінити на рівняння $f(x) = g(x)$;
5) рівняння $f(x) = g(x)$ замінити на рівняння $(x + 1)\, f(x) = (x + 1)\, g(x)$?

209.• Яка з двох нерівностей є наслідком другої:
1) $x < -4$ і $x < 1$;
2) $x \geqslant 5$ і $x > 5$;
3) $x^2 < 0$ і $x < 0$?

210.• Яка з двох нерівностей є наслідком другої:
1) $x^2 - 4 > 0$ і $x - 2 > 0$;
2) $x^2 \geqslant 0$ і $x > 0$?

Готуємося до вивчення нової теми

211. Розв'яжіть нерівність:
1) $(x - 5)^2 > 0$;
2) $(x - 5)^2 \geqslant 0$;
3) $(x - 5)^2 < 0$;
4) $(x - 5)^2 \leqslant 0$;
5) $\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^2 > 0$;
6) $\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^2 \geqslant 0$;
7) $\frac{x+5}{x+5} > \frac{1}{2}$;
8) $\frac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$;
9) $\frac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

212. Яким числом, додатним чи від'ємним, є значення виразу $x - 2$, якщо:
1) $x \in (2; +\infty)$;
2) $x \in (-3; -2)$;
3) $x \in (-\infty; -3)$;
4) $x \in (5; 9)$?

213. Розкладіть на множники квадратний тричлен:
1) $x^2 + x - 6$;
2) $35 - 2x - x^2$;
3) $2x^2 + 9x - 18$;
4) $5x^2 - 16x + 3$.

Поновіть у пам'яті зміст п. 24; 25 на с. 322.

8. Метод інтервалів

На рисунку 59 зображено графік деякої функції f, у якої $D(f) = \mathbb{R}$ і нулями є числа x_1, x_2 і x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

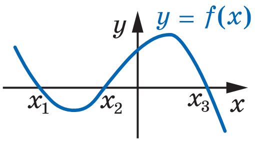


Рис. 59

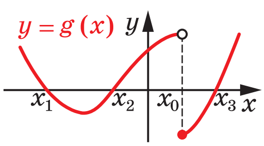


Рис. 60

А чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості? Відповідь на це запитання негативна. Для функції g, графік якої зображено на рисунку 60, проміжок $(x_2; x_3)$ не є проміжком знакосталості. Справді, якщо $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а якщо $x \in (x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$.

Принципова відмінність між функціями f і g полягає в тому, що графіком функції f є **неперервна крива**, а графік функції g такої властивості не має. Говорять, що функція f **неперервна в кожній точці області визначення**, або, як ще прийнято говорити, **неперервна на $D(f)$**, а функція g **у точці $x_0 \in D(g)$ має розрив.**

Таке уявлення про неперервну функцію інтуїтивно зрозуміле. Детальніше з цим поняттям ви ознайомитеся в 11 класі.

Для подальших міркувань нам знадобиться така наочно очевидна теорема:

Теорема 8.1. ***Якщо функція f неперервна і не має нулів на деякому проміжку, то вона на цьому проміжку зберігає постійний знак.***

Ілюстрацією до цієї теореми слугує графік функції, зображений на рисунку 59.

Ця теорема дозволяє, не будуючи графіка функції f, розв'язувати нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Звернемося знову до рисунку 59.

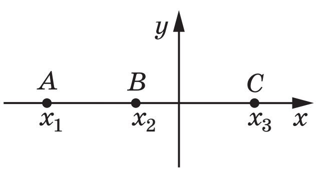


Рис. 61

Уявімо собі, що з цього рисунка «зникли» всі точки графіка функції f, за винятком точок $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_3; 0)$ (рис. 61). Очевидно, що кожний з проміжків $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не містить нулів функції f.

Тоді, пам'ятаючи, що функція f неперервна на $D(f) = \mathbb{R}$, можна стверджувати: указані проміжки є проміжками знакосталості функції f.

Залишається лише з'ясувати, якого знака набувають значення функції f на цих проміжках. Це можна зробити за допомогою «пробних точок».

Нехай, наприклад, $a \in (-\infty; x_1)$ і $f(a) > 0$. Тоді для будь-якого $x \in (-\infty; x_1)$ виконується нерівність $f(x) > 0$. Аналогічно можна «взяти пробу» з кожного проміжку знакосталості.

Описаний метод розв'язування нерівностей називають **методом інтервалів**.

Справедлива така теорема.

Теорема 8.2. ***Функція*** $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ***де*** $f(x)$ ***і*** $g(x)$ ***— многочлени, неперервна на*** $D(y)$.

Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x}$ неперервна в кожній точці множини $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, тобто на $D(y)$.

Ця теорема дозволяє для нерівностей виду $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ або $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ – многочлени, застосовувати метод інтервалів.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $(x + 3)(x - 1)(x - 2) > 0$.

Розв'язання. Числа -3, 1 і 2 є нулями функції $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$, яка неперервна на $D(f) = \mathbb{R}$. Тому ці числа розбивають множину $\mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f: $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$ (рис. 62).

За допомогою «пробних точок» установимо знаки функції f на зазначених проміжках.

Маємо:

$3 \in (2; +\infty)$; $f(3) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (2; +\infty)$;

$\dfrac{3}{2} \in (1; 2)$; $f\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (1; 2)$;

$0 \in (-3; 1)$; $f(0) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (-3; 1)$;

$-4 \in (-\infty; -3)$; $f(-4) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (-\infty; -3)$.

Результати дослідження знака функції f показано на рисунку 63.

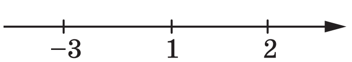


Рис. 62

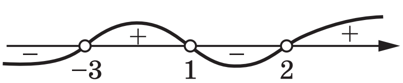


Рис. 63

Тепер можна записати відповідь.

Відповідь: $(-3; 1) \cup (2; +\infty)$.

Зауваження. При оформленні розв'язування нерівностей процес дослідження знака функції можна проводити усно, фіксуючи результати у вигляді схеми, показаної на рисунку 63.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

Розв'язання. Позначимо нулі функції $f(x) = (x+1) \times \times (3-x)(x-2)^2$ на координатній прямій (рис. 64). Вони розбивають множину $D(f) = \mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f.

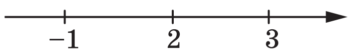


Рис. 64

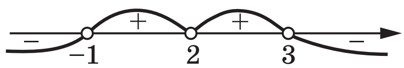


Рис. 65

Дослідимо знак функції f на цих проміжках. Результат дослідження показано на рисунку 65.

Відповідь: $(-1;\ 2) \cup (2;\ 3)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\dfrac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Розв'язання. Областю визначення функції

$$f(x) = \frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$$

є множина $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)$. Функція f є неперервною на кожному з проміжків $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right), \left(-\dfrac{1}{2};\ 4\right), (4;\ +\infty)$. Тому нулі -2, 1, 5 функції f розбивають $D(f)$ на проміжки знакосталості $(-\infty;\ -2)$, $\left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$, $(1;\ 4)$, $(4;\ 5)$, $(5;\ +\infty)$.

Результат дослідження знака функції f на цих проміжках показано на рисунку 66.

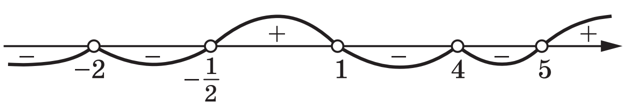


Рис. 66

Відповідь: $(-\infty;\ -2) \cup \left(-2;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1;\ 4) \cup (4;\ 5)$.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{5}{2+x} < 1$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)} < 0$; $\dfrac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)} < 0$.

Областю визначення функції $f(x)=\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}$ є множина $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. Функція f нулів не має. Оскільки функція f неперервна на кожному з проміжків $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$, то ці проміжки є для неї проміжками знакосталості.

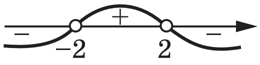


Рис. 67

На рисунку 67 показано результат дослідження знака функції f.

Розв'язання цієї нерівності можна оформити інакше. Оскільки дискримінант квадратного тричлена x^2-4x+8 від'ємний, а старший коефіцієнт додатний, то для будь-якого $x\in\mathbb{R}$ маємо $x^2-4x+8>0$. Тому нерівність $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}<0$ рівносильна такій: $(2-x)(2+x)<0$. Далі слід звернутися до рисунка 67.

Відповідь: $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.

За допомогою методу інтервалів можна розв'язувати і нестрогі нерівності $f(x)\geqslant 0$ або $f(x)\leqslant 0$. Множина розв'язків такої нерівності — це об'єднання множини розв'язків нерівності $f(x)>0$ (або відповідно $f(x)<0$) і множини коренів рівняння $f(x)=0$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\frac{4x^2+4x+1}{x^2+2x-3}\geqslant 0$.

Розв'язання. Радимо, якщо це можливо, многочлени, записані в чисельнику і знаменнику дробу, розкладати на множники. Тоді набагато зручніше досліджувати знак функції на проміжках знакосталості.

Маємо: $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)}\geqslant 0$.

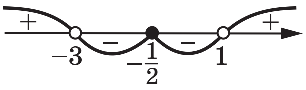


Рис. 68

Установлюємо (рис. 68), що множина $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ +\infty)$ є множиною розв'язків нерівності $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)}>0$.

Рівняння $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)}=0$ має єдиний корінь $x=-\frac{1}{2}$.

Об'єднавши множини розв'язків рівняння і нерівності, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ +\infty)\cup\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

?

1. Чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості?

2. Чи кожна неперервна функція зберігає постійний знак на проміжку з області визначення, який не містить її нулів?

3. Опишіть метод інтервалів розв'язування нерівностей.

Вправи

214.° Розв'язіть нерівність:

1) $(x+1)(x-2)(x+5) > 0$;
2) $x(x-3)(x+2) < 0$;
3) $(x+7)(x+5)(x-9) \leqslant 0$;
4) $(x+3)(x-8)(x-10) \geqslant 0$;
5) $(2x+3)(3x-1)(x+4) > 0$;
6) $(2x-1)(3-x)(x+1) < 0$;
7) $(x-6)(7x+1)(2-9x) \geqslant 0$;
8) $(x-3)(2x+1)(1-5x)(x+4) > 0$.

215.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+3)(x-1)(x+4) < 0$;
2) $(x-7)(x+8)(x-12) \geqslant 0$;
3) $(3x+2)(x-5)(4x-1) > 0$;
4) $(1-3x)(x+2)(3-x) < 0$;
5) $x(5-x)(6-x) \leqslant 0$;
6) $x(5x+3)(2-x)(4x-3)(x+5) > 0$.

216.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x-8}{x+7} < 0$;
2) $\frac{x+9}{x-11} > 0$;
3) $\frac{x-2,4}{x-3,7} \geqslant 0$;
4) $\frac{x+5,2}{x-1,4} \leqslant 0$;
5) $\frac{5-x}{x-6} \geqslant 0$;
6) $\frac{6x+3,6}{2,5-5x} \leqslant 0$;
7) $\frac{(x+15)(x-2)}{x-15} \geqslant 0$;
8) $\frac{x-3,8}{(x+5)(x-16)} \leqslant 0$;
9) $\frac{(x+5,4)(x+4,2)}{(12-x)(x-4)} \geqslant 0$.

217.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x+3}{x-1} > 0$;
2) $\frac{x}{x+2} < 0$;
3) $\frac{x-4}{x} \geqslant 0$;
4) $\frac{(x-2)(x+1)}{x-4} < 0$;
5) $\frac{(x+1,2)(x-1,6)}{x-1,4} \leqslant 0$;
6) $\frac{x-2,3}{(1,9-x)(x-1,3)} \geqslant 0$;
7) $\frac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)} > 0$;
8) $\frac{(x+1)(x-7)}{(8+x)(10-x)} \leqslant 0$;
9) $\frac{(x+1)(3-x)}{(3x-2)(4-3x)} \geqslant 0$.

218.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+2)(x^2-1) > 0$;
2) $(x^2-6x)(x^2+5x-6) < 0$;
3) $(x^2-4x+3)(x^2+3x+2) \geqslant 0$;
4) $4x^3-25x < 0$;

5) $\dfrac{x^2-4}{x^2-9}>0;$

6) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-8x+7}\leqslant 0;$

7) $\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-3x-4}\geqslant 0;$

8) $\dfrac{x^3-16x}{x^2-x-30}<0.$

219.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $(x^2-64)(x^2-10x+9)\geqslant 0;$

2) $(x^2+7x)(x^2-7x+6)<0;$

3) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-36}\leqslant 0;$

4) $\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2-x-3}\geqslant 0.$

220.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x+1)(x-3)(x^2+4)<0;$

2) $(2-x)(3x+5)(x^2-x+1)>0;$

3) $(3x^2-5x-2)(2x^2+x+1)<0;$

4) $(4-x)(3x+1)(x^4+x^2+1)<0.$

221.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^4+1)(5-6x)(x-2)<0;$

2) $(x+3)(x+6)(x+5)(x^2-4x+5)\geqslant 0.$

222.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-4)^2(x^2-7x+10)<0;$

2) $(x-4)^2(x^2-7x+10)\leqslant 0;$

3) $(x-4)^2(x^2-7x+10)>0;$

4) $(x-4)^2(x^2-7x+10)\geqslant 0;$

5) $(x-3)^2(x^2+x-2)<0;$

6) $(x-3)^2(x^2+x-2)\leqslant 0;$

7) $(x-3)^2(x^2+x-2)>0;$

8) $(x-3)^2(x^2+x-2)\geqslant 0.$

223.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-1)(x+3)^2(x-2)<0;$

2) $|x-4|(x+1)(x-3)>0;$

3) $(2x+1)^2(x^2-4x+3)>0;$

4) $(2x+1)^2(x-1)(x-2)\geqslant 0;$

5) $(x-5)(x+4)(x^2+6x+9)\geqslant 0.$

224.• Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2(x+1)(x-4)>0;$

2) $(x-3)(x+2)^2(x-5)\geqslant 0.$

225.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}>0;$

2) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}\geqslant 0;$

3) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}<0;$

4) $\dfrac{x^2+x-20}{x^2-6x+9}\leqslant 0;$

5) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}>0;$

6) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}\geqslant 0;$

7) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}<0;$

8) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}\leqslant 0.$

226.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x-2}{x+3} \geqslant \frac{3x-4}{x+3}$;
4) $\frac{x}{x+3} > \frac{1}{2}$;
7) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} > 1$;
2) $\frac{x^2+3x}{x-5} \geqslant \frac{28}{x-5}$;
5) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$;
8) $\frac{x-3}{x+3} \leqslant \frac{2x-5}{4x-3}$.
3) $\frac{1}{x} < 1$;
6) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$;

227.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{x+2} \leqslant 1$;
2) $\frac{x}{x+1} \geqslant 2$;
3) $\frac{5x+8}{4-x} < 2$;
4) $\frac{2}{x+3} \geqslant \frac{1}{x-1}$.

228.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x+3)(1-4x)^4(x-2)^3(x+6) < 0$;
2) $(1-3x)^3(x+2)^2(x+4)^5(x-3) > 0$;
3) $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1) \leqslant 0$;
4) $(1-2x)(x-3)^9(2x+7)^6(x+4)(x-2)^2 > 0$.

229.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(3-x)^3(x+2)^2(x-1)(2x-5) < 0$;
2) $(x^2-4)(x^2+x-2) \leqslant 0$;
3) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10) \leqslant 0$.

230.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)} > 0$;
4) $\frac{x^5\,|3x-1|\,(x+3)}{x-2} \leqslant 0$;
2) $\frac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5} > 0$;
5) $\frac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3(x+1)^2} \leqslant 0$;
3) $\frac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2} \geqslant 0$;
6) $\frac{(x+6)^3(x+4)(6-x)^5}{|x+5|} \geqslant 0$.

231.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3} \leqslant 0$;
3) $\frac{x^2(x^2-1)}{x-4} > 0$;
2) $\frac{(x-1)^2(x+2)^3}{x-5} \geqslant 0$;
4) $\frac{(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4}{x^5} \leqslant 0$.

232.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \geqslant \frac{3}{x}$;
2) $\frac{12}{x^2-4} - \frac{7}{x^2-9} \leqslant 0$.

233.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{2(x-3)}{x(x-6)} < \frac{1}{x-1}$;
2) $\frac{2x+3}{x^2+x-12} < \frac{1}{2}$.

234.* Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}<0$;
2) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}>0$;
3) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0$;
4) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\geqslant 0$;
5) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}<0$;
6) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}>0$;
7) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\leqslant 0$;
8) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\geqslant 0$.

235.* Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}>0$;
2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\geqslant 0$;
3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}<0$;
4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\leqslant 0$;
5) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}<0$;
6) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}>0$;
7) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\leqslant 0$;
8) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\geqslant 0$.

236.* Розв'яжіть нерівність $\left|\dfrac{x}{x^2-9}\right|\leqslant\dfrac{x}{x^2-9}$.

237.* Розв'яжіть нерівність $\left|\dfrac{x-1}{x^2-16}\right|\leqslant\dfrac{x-1}{x^2-16}$.

238.* Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)(x-a)<0$;
2) $(x-3)(x-a)^2>0$;
3) $(x-3)(x-a)^2\geqslant 0$;
4) $(x-a)(x+5)^2<0$;
5) $(x-a)(x+5)^2\leqslant 0$;
6) $\dfrac{x-5}{x-a}\geqslant 0$;
7) $\dfrac{(x+1)(x-a)}{x+1}\geqslant 0$;
8) $\dfrac{(x+1)(x-a)}{x-a}\leqslant 0$.

Вправи для повторення

239. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2=2x+3$;
2) $x^2=\dfrac{8}{x}$.

240. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ 2x+5y=10; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y=x^2, \\ 3x+2y=-6. \end{cases}$

241. Побудуйте графік функції $y=\begin{cases} -\dfrac{6}{x}, \text{ якщо } x\leqslant -1, \\ x^2, \text{ якщо } x>-1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

ЗАВДАННЯ В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ «ПЕРЕВІР СЕБЕ» № 1

1. Дано функцію $y=\begin{cases} x+3, \text{ якщо } x<0, \\ x, \quad\ \text{ якщо } x\geqslant 0. \end{cases}$ Укажіть правильне твердження:

А) $f(-1) < f(1)$; В) $f(0) = f(-3)$;
Б) $f(-1{,}5) \neq f(1{,}5)$; Г) $f(3) = f(0)$.

2. Яка область визначення функції $f(x)=\sqrt{4-x^2}$?

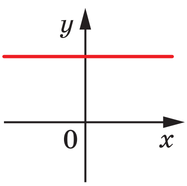
А) $\mathbb{R}$; Б) $(-\infty;\ -2] \cup [2;\ +\infty)$; В) $[-2;\ 2]$; Г) $[0;\ 2]$.

3. Яка з функцій визначена на множині дійсних чисел?

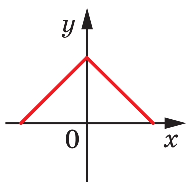
А) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$; Б) $y=\frac{x^2+1}{x^2}$; В) $y=\frac{x^2}{x^2-1}$; Г) $y=\frac{x^2-1}{x^2}$.

4. Яка із зображених фігур не може слугувати графіком функції?

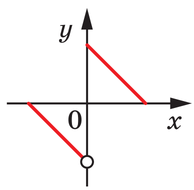
А)



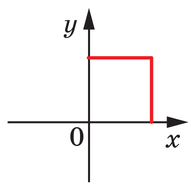
Б)



В)



Г)



5. Область значень якої з функцій складається з одного числа?

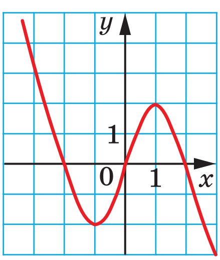
А) $y=\sqrt{x}$; Б) $y=\sqrt{x^2}$; В) $y=\sqrt{-x}$; Г) $y=\sqrt{-x^2}$.

6. Знайдіть нулі функції $y=\frac{x}{2}-\frac{4}{x}$.

А) $-4;\ 4$; Б) $-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}$; В) $0;\ 2\sqrt{2}$; Г) $2;\ 4$.

7. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Укажіть проміжок зростання функції.

А) $[-1;\ 1]$; В) $[0;\ 2]$;
Б) $[-2;\ 2]$; Г) $(-\infty;\ +\infty)$.



8. Яка з даних функцій є спадною на множині $\mathbb{R}$?

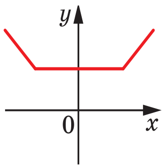
А) $y = -x^2$; В) $y=\frac{1}{x}$;
Б) $y = -x$; Г) $y = x$.

9. Чому дорівнює найбільше значення функції $y = 9 - x^2$ на проміжку $[1;\ 2]$?

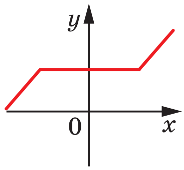
А) 8; Б) 5; В) 9; Г) такого значення не існує.

10. Укажіть графік непарної функції.

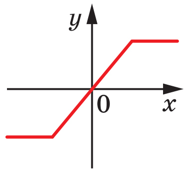
А)



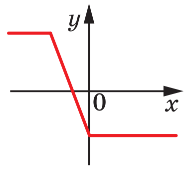
Б)



В)



Г)



11. Яка з даних функцій є парною?

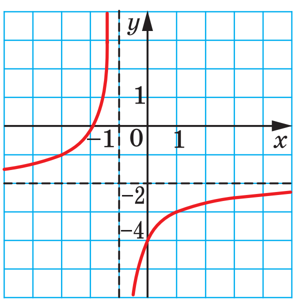
А) $y = x^2 - \frac{5}{x}$; Б) $y = x^2 - 5\sqrt{x}$; В) $y = x^2 - 5$; Г) $y = x^2 - 5x$.

12. Графік функції $y = \sqrt{x}$ перенесли паралельно на 3 одиниці вправо. Графік якої функції було отримано?

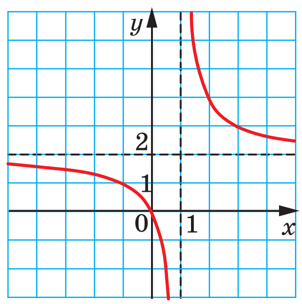
А) $y = \sqrt{x-3}$; Б) $y = \sqrt{x} - 3$; В) $y = \sqrt{x+3}$; Г) $y = \sqrt{x} + 3$.

13. Укажіть графік функції $y = \frac{2}{x-1} + 2$.

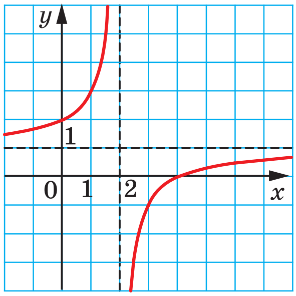
А)



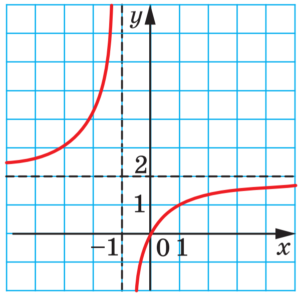
В)



Б)



Г)



14. Яка функція є оберненою до функції $y = x - 3$?

А) $y = x - 3$; Б) $y = x + 3$; В) $y = -x - 3$; Г) $y = -x + 3$.

15. Яка функція є оберненою до функції $y = \frac{x}{x+1}$?

А) $y = \frac{x}{x-1}$; Б) $y = \frac{x+1}{x}$; В) $y = \frac{x}{1-x}$; Г) $y = \frac{x}{x+1}$.

16. Укажіть пару рівносильних рівнянь.

А) $x^2 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ і $x^2 = 0$;

Б) $2x(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1)$ і $2x = 3$;

В) $2x - 3 = 4$ і $(2x - 3)^2 = 16$;

Г) $5x(x^2 + 1) = 7(x^2 + 1)$ і $5x = 7$.

17. Множиною розв'язків якої нерівності є проміжок $[-3; 2]$?

А) $\frac{x+3}{x-2} < 0$; В) $(x + 3)(x - 2) < 0$;

Б) $\frac{x+3}{x-2} \leqslant 0$; Г) $(x + 3)(x - 2) \leqslant 0$.

18. Розв'яжіть нерівність $\frac{5}{x} \leqslant 6 - x$.

А) $(0; 1] \cup [5; +\infty)$;

Б) $(-\infty; 0) \cup [1; 5]$;

В) $[0; 1] \cup [5; +\infty)$;

Г) $(-\infty; 0] \cup [1; 5]$.

ПІДСУМКИ

При вивченні матеріалу параграфа «Повторення та розширення відомостей про функцію» ви повторили, що:

- функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y. Незалежну змінну ще називають аргументом функції. Множину значень, яких набуває аргумент функції $y = f(x)$, називають областю визначення функції і позначають $D(f)$ або $D(y)$. Множину значень, яких набуває залежна змінна, називають областю значень функції і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Коли $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, функцію f називають числовою;
- графіком числової функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f;
- значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції;
- проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції;
- функцію f називають зростаючою на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$;
- функцію f називають спадною на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$;
- якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають зростаючою. Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають спадною;
- графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$;
- графік функції $y = f(x + a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$;
- графік функції $y = kf(x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою абсцисою і ординатою, помноженою на k;

- рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називають рівносильними, якщо множини їх коренів рівні;
- нерівності називають рівносильними, якщо множини їх розв'язків рівні.

Ви дізналися, що:

- якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$, де $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ називають найменшим значенням функції f на множині M і записують $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$
- якщо для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$, де $x_0 \in M$, то число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині M і записують $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$
- функцію f називають парною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = f(x)$;
- функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x з області визначення $f(-x) = -f(x)$;
- вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції;
- початок координат є центром симетрії графіка непарної функції;
- графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою ординатою і абсцисою, поділеною на k;
- функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$;
- якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною;
- функції f і g називають взаємно оберненими, якщо: 1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$; 2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ з рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$;
- графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$;
- якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена функція g є також зростаючою (спадною);
- якщо множина коренів рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ містить множину коренів рівняння $f_1(x) = g_1(x)$, то рівняння $f_2(x) = g_2(x)$ називають наслідком рівняння $f_1(x) = g_1(x)$;
- якщо множина розв'язків першої нерівності є підмножиною множини розв'язків другої нерівності, то другу нерівність називають наслідком першої нерівності.

§ 3 СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

У цьому параграфі ви дізнаєтесь, яку функцію називають степеневою функцією з цілим показником, які властивості має ця функція, що називають коренем n-го степеня, які властивості має корінь n-го степеня, що називають степенем з раціональним показником і які його властивості, які рівняння називають ірраціональними.

Ви навчитеся добувати корені n-го степеня, виконувати піднесення до степеня з раціональним показником, перетворювати вирази, які містять корені n-го степеня, степінь з раціональним показником; розв'язувати ірраціональні рівняння.

9. Степенева функція з натуральним показником

Властивості і графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ добре знайомі вам з попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником.**

Оскільки вираз x^n, $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x, то *областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина* $\mathbb{R}$.

Очевидно, що розглядувана *функція має єдиний нуль* $x = 0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості і графік якої були розглянуті у 8 класі.

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a \geqslant 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{2k} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число, є множина* $[0; +\infty)$.

Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число.*

Функція $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Отже, *функція* $y = x^n$, *де* n *— парне натуральне число, спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція *зростає на проміжку* $[0; +\infty)$.

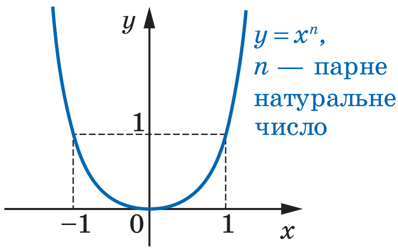


Рис. 69

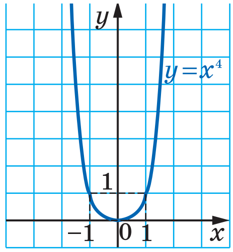


Рис. 70

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 69). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 70.

- **Другий випадок: *n* — непарне натуральне число.**

Зазначимо, що при $n = 1$ отримуємо функцію $y = x$, властивості і графік якої були розглянуті в 7 класі.

Тепер нехай $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого a існує таке значення аргументу x, що $x^{2k+1} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^n$, *де* n — *непарне натуральне число, є множина* $\mathbb{R}$.

Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty;\ 0)$ *і* $(0;\ +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^n$, *де* n — *непарне натуральне число*.

Функція $y = x^n$, *де* n — *непарне натуральне число, є непарною*. Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

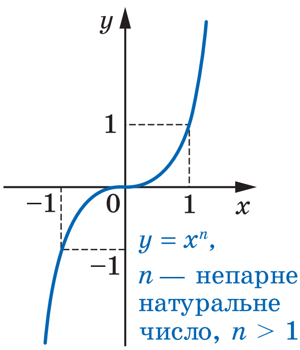


Рис. 71

Отже, *функція* $y = x^n$, *де* n — *непарне натуральне число, є зростаючою*.

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 71).

Зокрема, графіки функцій $y = x^3$ і $y = x^5$ зображено на рисунку 72.

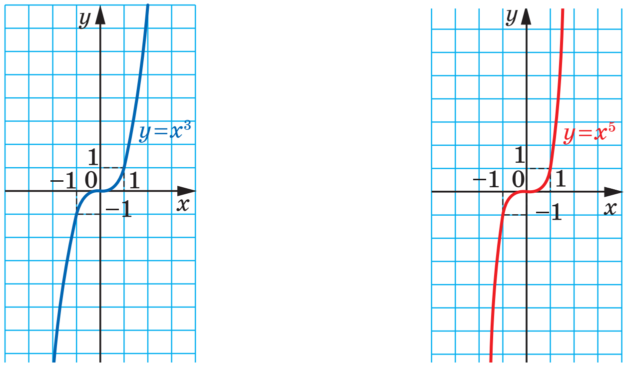


Рис. 72

У таблиці наведено властивості функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, установлені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$[0; +\infty)$	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 0$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$	Зростаюча

?

1. Яку функцію називають степеневою функцією з натуральним показником?
2. Яка область визначення степеневої функції з натуральним показником?
3. Сформулюйте властивості функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.

4. Як виглядає графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число?
5. Сформулюйте властивості функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число.
6. Як виглядає графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число?

Вправи

242.° Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^5$:
1) $A\ (-1;\ 1)$;
2) $B\ (2;\ 32)$;
3) $C\ (-0{,}2;\ -0{,}0032)$;
4) $D\ (-3;\ -243)$?

243.° Через які з даних точок проходить графік функції $y = x^4$:
1) $A\ (2;\ 16)$;
2) $B\ (-10;\ -10\ 000)$;
3) $C\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{81}\right)$;
4) $D\ (0{,}5;\ -0{,}0625)$?

244.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^4$ проходить через точку: 1) $A\ (2;\ -12)$; 2) $B\ (-3;\ -3)$?

245.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^3$ проходить через точку: 1) $C\ (3;\ -18)$; 2) $D\ (-2;\ 64)$?

246.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{19}$. Порівняйте:
1) $f\ (1{,}4)$ і $f\ (1{,}8)$;
2) $f\ (-7{,}6)$ і $f\ (-8{,}5)$;
3) $f\ (-6{,}9)$ і $f\ (6{,}9)$;
4) $f\ (0{,}2)$ і $f\ (-12)$.

247.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{21}$. Порівняйте:
1) $f\ (20)$ і $f\ (17)$;
2) $f\ (-44)$ і $f\ (1{,}5)$;
3) $f\ (-52)$ і $f\ (-45)$.

248.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{20}$. Порівняйте:
1) $f\ (3{,}6)$ і $f\ (4{,}2)$;
2) $f\ (-6{,}7)$ і $f\ (-5{,}8)$;
3) $f\ (-2{,}4)$ і $f\ (2{,}4)$;
4) $f\ (-15)$ і $f\ (2)$.

249.° Функцію задано формулою $f\ (x) = x^{50}$. Порівняйте:
1) $f\ (9{,}2)$ і $f\ (8{,}5)$;
2) $f\ (-1{,}1)$ і $f\ (-1{,}2)$;
3) $f\ (19)$ і $f\ (-19)$;
4) $f\ (-7)$ і $f\ (9)$.

250.° Скільки коренів має рівняння $x^n = 1600$, якщо:
1) n — парне натуральне число;
2) n — непарне натуральне число?

251.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 = 32$; 2) $x^3 = -\frac{8}{27}$; 3) $x^4 = 81$; 4) $x^4 = -16$.

252.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = -27$; 2) $x^5 = 0{,}00032$; 3) $x^6 = 64$; 4) $x^8 = -1$.

253.° Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

1) $x^6 = 2$; 2) $x^5 = -3$; 3) $x^7 = 9$; 4) $x^6 = -10$?

254.• Розташуйте в порядку спадання значення виразів $\left(-\frac{3}{4}\right)^5$, $\left(-2\frac{1}{3}\right)^5$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$, $\left(-2\frac{2}{5}\right)^5$.

255.• Розташуйте в порядку зростання значення виразів $(1{,}06)^4$, $(-0{,}48)^4$, $(-2{,}12)^4$, $(-3{,}25)^4$.

256.• Знайдіть точки перетину графіків функцій:

1) $y = x^6$ і $y = 2x^4$; 2) $y = x^4$ і $y = -27x$.

257.• Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^5$ і $y = x^3$.

258.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 - 1$; 3) $y = -x^3$; 5) $y = (x - 1)^4$;

2) $y = (x + 2)^3$; 4) $y = x^4 - 4$; 6) $y = -\frac{1}{2}x^4$.

259.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 + 3$; 3) $y = x^4 + 2$; 5) $y = \frac{1}{4}x^3$;

2) $y = (x - 3)^3$; 4) $y = (x + 1)^4$; 6) $y = -x^4$.

260.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку:

1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -2]$.

261.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^5$ на проміжку:

1) $[-3; 3]$; 2) $[-2; 0]$; 3) $[1; +\infty)$.

262.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0{,}5x - 2$.

263.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

264. Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\begin{cases} x^4, & \text{якщо } x<0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 0; \end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases} x^5, & \text{якщо } x<-1, \\ -x-2, & \text{якщо } x\geqslant -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

265. Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{якщо } x<0, \\ -\sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 0. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

266. Скільки коренів залежно від значення a має рівняння:
1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

267. Скільки коренів залежно від значення a має рівняння $x^8 = 9a - a^3$?

268. Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $f(x) = x^n$, якщо:
1) $f(-4) > f(-2)$;
2) $f(-4) < f(2)$;
3) $f(-4) < f(-2)$;
4) $f(4) > f(2)$;
5) $f(-4) > f(2)$;
6) $f(4) > f(-2)$?

Готуємося до вивчення нової теми

269. Подайте степінь у вигляді дробу:
1) 3^{-8}; 2) 5^{-6}; 3) a^{-9}; 4) d^{-3}; 5) 12^{-1}; 6) m^{-1}; 7) $(a-b)^{-2}$; 8) $(2x-3y)^{-4}$.

270. Обчисліть значення виразу:
1) $3^{-1} - 4^{-1}$; 2) $2^{-3} + 6^{-2}$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} + (-2{,}3)^0 - 5^{-2}$; 4) $9 \cdot 0{,}1^{-1}$; 5) $0{,}5^{-2} \cdot 4^{-1}$; 6) $(2^{-1} - 8^{-1} \cdot 16)^{-1}$.

271. Подайте у вигляді дробу вираз:
1) $a^{-2} + a^{-3}$;
2) $mn^{-4} + m^{-4}n$;
3) $(c^{-1} - d^{-1})(c-d)^{-2}$;
4) $(x^{-2} + y^{-2})(x^2 + y^2)^{-1}$.

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 2; 3 на с. 315.

10. Степенева функція з цілим показником

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають **степеневою функцією з цілим показником**.

Властивості цієї функції для натурального показника було розглянуто в попередньому пункті. Тут ми розглянемо випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем.

Областю визначення функції $y = x^0$ є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, областю значень — одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 73.

Розглянемо функцію $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

З окремим випадком цієї функції, коли $n = 1$, тобто з функцією $y = \frac{1}{x}$, ви знайомі з курсу алгебри 8 класу.

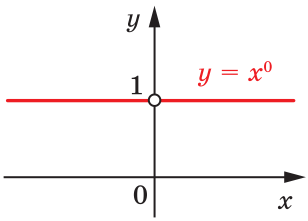


Рис. 73

Запишемо функцію $y = x^{-n}$ у вигляді $y = \frac{1}{x^n}$. Зрозуміло, що *областю визначення функції* $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, *є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Очевидно, що ця функція нулів не має.

Подальші дослідження властивостей функції $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Маємо: $x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\frac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять від'ємні числа, а також число 0.

Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-2k} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* n *— парне натуральне число, є множина* $(0; +\infty)$.

Очевидно, що *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* n *— парне натуральне число.*

Функція $y = x^{-n}$, *де* n *— парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{-2k} = \frac{1}{(-x)^{2k}} = \frac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty;\ 0)$, $x_2 \in (-\infty;\ 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо $0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$. Звідси $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $\frac{1}{x_1^{2k}} < \frac{1}{x_2^{2k}}$; $x_1^{-2k} < x_2^{-2k}$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число, зростає на проміжку* $(-\infty;\ 0)$.

Аналогічно можна показати, що *функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число, спадає на проміжку* $(0;\ +\infty)$.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля x значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, стає все меншим і меншим. Тому відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Аналогічно можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка до осі ординат зменшується і може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число (рис. 74). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^2}$ зображено на рисунку 75.

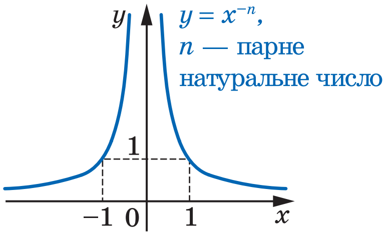


Рис. 74

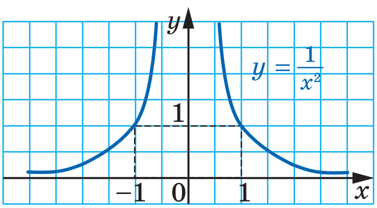


Рис. 75

- **Другий випадок: $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.**

Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-(2k-1)} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* n — *непарне натуральне число, є множина* $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число.*

Функція $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число, є непарною.* Справді, для будь-якого x з області визначення виконується рівність $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивостями числових нерівностей, отримуємо $-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$; $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1}$; $-\frac{1}{x_1^{2k-1}} < -\frac{1}{x_2^{2k-1}}$; $\frac{1}{x_1^{2k-1}} > \frac{1}{x_2^{2k-1}}$. Отже, розглядувана функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$. Аналогічно можна показати, що ця функція спадає і на проміжку $(0; +\infty)$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$.

Отримані властивості дозволяють схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число (рис. 76). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^3}$ зображено на рисунку 77.

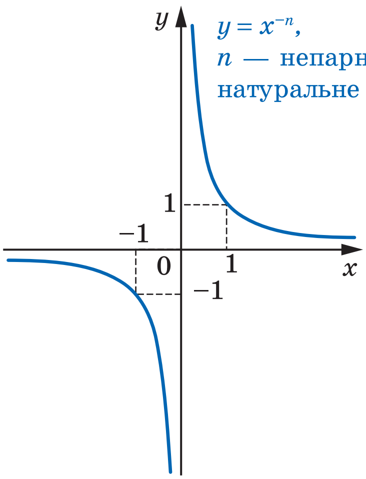


Рис. 76

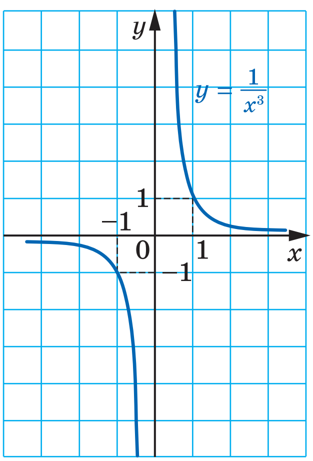


Рис. 77

У таблиці наведено властивості функції $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, вивчені в цьому пункті.

	n — парне натуральне число	n — непарне натуральне число
Область визначення	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Область значень	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
Нулі функції	–	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$, $y > 0$ на проміжку $(0; +\infty)$
Парність	Парна	Непарна
Зростання / спадання	Зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$	Спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$

?

1. Яку функцію називають степеневою функцією з цілим показником?

2. Яка область визначення функції $y = x^0$?

3. Яка область значень функції $y = x^0$?

4. Яка фігура є графіком функції $y = x^0$?

5. Яка область визначення степеневої функції з цілим від'ємним показником?

6. Сформулюйте властивості функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число.

7. Як виглядає графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число?

8. Сформулюйте властивості функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число.

9. Як виглядає графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число?

Вправи

272.° Чи проходить графік функції $y = x^{-4}$ через точку:

1) $A\left(2; \frac{1}{16}\right)$; 2) $B\left(-2; \frac{1}{8}\right)$; 3) $C\left(\frac{1}{3}; 81\right)$; 4) $D\left(\sqrt{2}; -\frac{1}{4}\right)$?

273.° Чи проходить графік функції $y = x^{-5}$ через точку:

1) A (0; 0); 2) B (−1; −1); 3) $C\left(\frac{1}{2}; 32\right)$; 4) $D\left(-3; -\frac{1}{243}\right)$?

274.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку: 1) A (−5; 20); 2) $B\left(2; \frac{1}{24}\right)$?

275.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^{-4}$ проходить через точку: 1) A (3; −3); 2) $B\left(-2; \frac{1}{2}\right)$?

276.° Дано функцію $f(x) = x^{-19}$. Порівняйте:

1) f (1,6) і f (2);
2) f (−5,6) і f (−6,5);
3) f (−9,6) і f (9,6);
4) f (0,1) і f (−10).

277.° Дано функцію $f(x) = x^{-25}$. Порівняйте:

1) f (18) і f (16); 2) f (−42) і f (2,5); 3) f (−32) і f (−28).

278.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{-16}$. Порівняйте:

1) f (1,6) і f (2,2);
2) f (−4,5) і f (−3,6);
3) f (−3,4) і f (3,4);
4) f (−18) і f (3).

279.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{-40}$. Порівняйте:

1) f (6,2) і f (5,5);
2) f (−1,6) і f (−1,7);
3) f (24) і f (−24);
4) f (−8) і f (6).

280.° Скільки коренів має рівняння $x^{-n} = 2500$, якщо:

1) n — парне натуральне число;
2) n — непарне натуральне число?

281.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$; 2) $y = ((x - 2)^{-2})^{-2}$.

282.° Чи має дане рівняння від'ємний корінь:

1) $x^{-6} = 2$; 2) $x^{-5} = 0,3$; 3) $x^{-7} = -3$; 4) $x^{-8} = -2$?

283.• Знайдіть точки перетину графіків функцій:

1) $y = x$ і $y = x^{-3}$; 2) $y = x^{-2}$ і $y = \frac{1}{8}x$.

284.• Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = x^{-4}$ і $y = \frac{1}{32}x$.

285.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-2} + 2$; 3) $y = -\frac{1}{2}x^{-2}$; 5) $y = (x - 1)^{-3}$;

2) $y = (x - 3)^{-2}$; 4) $y = x^{-3} - 1$; 6) $y = 3x^{-3}$.

286.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^{-5} - 3$; 2) $y = 4x^{-5}$; 3) $y = (x + 1)^{-4}$; 4) $y = -x^{-4}$.

287.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-6}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 2) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$; 3) $[1; +\infty)$.

288.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^{-3}$ на проміжку:

1) $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(-\infty; -3]$.

289.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^{-6}, \\ y = 4 - x^2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = x^3 + 3. \end{cases}$

290.• Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^{-3}, \\ y = \frac{1}{8}x^2 - 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^{-2}, \\ y = x^2 - 2. \end{cases}$

291.• Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-2}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ якщо } x > -1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, установіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

292.• Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^{-3}, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ -x^2, \text{ якщо } -1 < x \leqslant 1, \\ x^{-3}, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, установіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

293.• Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x) = x^{-n}$, якщо:

1) $f(-2) > f(-1)$; 3) $f(-2) < f(-1)$;

2) $f(-2) < f(1)$; 4) $f(2) < f(1)$?

Готуємося до вивчення нової теми

294. Знайдіть значення виразу:

1) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$;
2) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}09}-2$;
3) $(\sqrt{13})^2-3\cdot(\sqrt{8})^2$;
4) $\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{18})^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{24}\right)^2$.

295. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0{,}49$; 3) $x^2 = 3$; 4) $x^2 = -25$.

296. При яких значеннях x має зміст вираз:

1) $\sqrt{-x}$;
2) $\sqrt{x^2}$;
3) $\sqrt{-x^2}$;
4) $\sqrt{x-8}$;
5) $\sqrt{x^2+8}$;
6) $\sqrt{(x-8)^2}$;
7) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$;
8) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$?

Поновіть у пам'яті зміст пункту 10 на с. 317.

11. Означення кореня n-го степеня

Ви знаєте, що квадратним коренем (коренем другого степеня) з числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a. Аналогічно дають означення кореня n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Означення. Коренем n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

Наприклад, коренем п'ятого степеня з числа 32 є число 2, оскільки $2^5 = 32$; коренем третього степеня з числа -64 є число -4, оскільки $(-4)^3 = -64$; коренями четвертого степеня з числа 81 є числа 3 і -3, оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

З означення випливає, що будь-який корінь рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є коренем n-го степеня з числа a, і навпаки, корінь n-го степеня з числа a є коренем розглядуваного рівняння.

Якщо n — непарне натуральне число, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ при будь-якому a перетинаються в одній точці (рис. 78). Це означає, що рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь при будь-якому a. Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то корінь n-го степеня з будь-якого числа існує, причому тільки один.

Корінь непарного степеня n, $n > 1$, з числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь n-го степеня з a»). Знак $\sqrt[n]{}$ називають **знаком кореня n-го степеня** або **радикалом**. Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**.

Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Корінь третього степеня також прийнято називати **кубічним коренем**. Наприклад, запис $\sqrt[3]{2}$ читають: «корінь кубічний з числа 2».

Наголосимо, що вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, існує при будь-якому a.

З означення кореня n-го степеня випливає, що ***при будь-якому a виконується рівність***

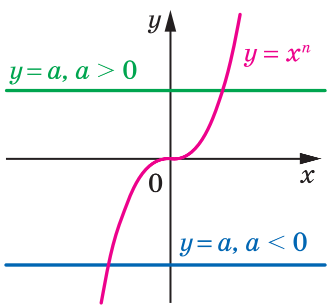
$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a}$$

Наприклад, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0,1}\right)^7 = -0,1$.

Розглянемо рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число.

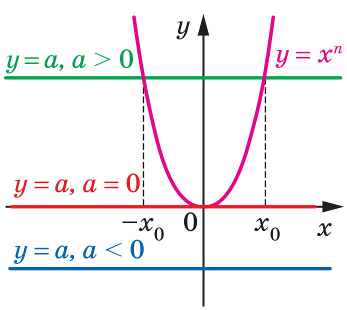
Якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ не мають спільних точок; якщо $a = 0$, то розглядувані графіки мають одну спільну точку; якщо $a > 0$, то спільних точок дві, причому їх абсциси — протилежні числа (рис. 79). Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — парне натуральне число, то при a < 0 корінь n-го степеня з числа a не існує; при a = 0 корінь n-го степеня з числа a дорівнює 0; при a > 0 існують два протилежні числа, які є коренями n-го степеня з числа a.



n — непарне натуральне число, $n > 1$

Рис. 78



n — парне натуральне число

Рис. 79

З рисунків 78 і 79 видно, що рівняння $x^n = a$ при $a \geqslant 0$ обов'язково має один невід'ємний корінь. Його називають **арифметичним коренем *n*-го степеня з числа *a*.**

Означення. Арифметичним коренем *n*-го степеня з невід'ємного числа *a*, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*.

Арифметичний корінь *n*-го степеня з невід'ємного числа *a* позначають так: $\sqrt[n]{a}$.

Наприклад, $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, оскільки $2 \geqslant 0$ і $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^{10} = 0$.

Узагалі, якщо $b \geqslant 0$ і $b^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.

Звернемо увагу на те, що для позначення арифметичного кореня *n*-го степеня з невід'ємного числа *a* і кореня непарного степеня *n* з числа *a* використовують один і той самий запис: $\sqrt[n]{a}$. Запис $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, використовують тільки для позначення арифметичного кореня. Зауважимо, що корінь парного степеня з числа *a* не має позначення.

За допомогою знака кореня *n*-го степеня можна записувати розв'язки рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

- Якщо *n* — непарне натуральне число, то при будь-якому значенні *a* розглядуване рівняння має єдиний корінь $x = \sqrt[n]{a}$.
- Якщо *n* — парне натуральне число і $a > 0$, то рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt[n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.
- Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Наприклад, коренем рівняння $x^3 = 7$ є число $\sqrt[3]{7}$; коренями рівняння $x^4 = 5$ є два числа: $-\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[4]{5}$.

З означення арифметичного кореня *n*-го степеня випливає, що для будь-якого невід'ємного числа *a* має місце таке:

$$\sqrt{\ } \geqslant \mathbf{0} \ \textit{і виконується рівність} \ \left(\sqrt{\ }\right) =$$

Наприклад, $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6 = 7$.

Покажемо, що при будь-якому *a* і $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}$$

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, потрібно показати, що $y^{2k+1} = x$.

Маємо: $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Доведена властивість дозволяє корінь непарного степеня з від'ємного числа виразити через арифметичний корінь.

Наприклад, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-12} = -\sqrt[5]{12}$.

?

1. Що називають коренем n-го степеня з числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
2. Що називають кубічним коренем з числа a?
3. Що називають підкореневим виразом?
4. При яких значеннях a має зміст вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?
5. Що називають арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$?
6. При яких значеннях a має зміст вираз $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$?

Вправи

297.° Чи має зміст запис:

1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{-2}$; 3) $\sqrt[4]{2}$; 4) $\sqrt[4]{-2}$; 5) $\sqrt[6]{0}$; 6) $\sqrt[6]{-1}$?

298.° Чи є правильною рівність (відповідь обґрунтуйте):

1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 3) $\sqrt[3]{-27} = -3$; 5) $\sqrt[4]{-16} = -2$;
2) $\sqrt[8]{1} = 1$; 4) $\sqrt[4]{16} = 2$; 6) $\sqrt[5]{-32} = 2$?

299.° Доведіть, що:

1) число 2 є арифметичним кубічним коренем з числа 8;
2) число 3 є арифметичним коренем четвертого степеня з числа 81;
3) число −3 не є арифметичним коренем четвертого степеня з числа 81;
4) число 10 не є арифметичним коренем п'ятого степеня з числа 10 000.

300.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{0,25}$; 3) $\sqrt[4]{0,0016}$; 5) $\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$; 7) $4\sqrt[3]{0,125}$; 9) $\sqrt[4]{9^2}$;
2) $\sqrt[3]{216}$; 4) $\sqrt[5]{-0,00001}$; 6) $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$; 8) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{-243}$; 10) $\sqrt[6]{8^2}$.

301.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{343}$; 3) $0{,}5\sqrt[3]{-64}$; 5) $\sqrt[6]{27^2}$;

2) $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$; 4) $-8\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}}$; 6) $\sqrt[100]{49^{50}}$?

302.° Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{11}\right)^2$; 3) $\left(-\sqrt[4]{7}\right)^4$; 5) $-\sqrt[8]{7^8}$; 7) $\left(-3\sqrt[4]{10}\right)^4$; 9) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{48^6}$.

2) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$; 4) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 6) $\left(5\sqrt[3]{3}\right)^3$; 8) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6$;

303.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\sqrt[8]{18}\right)^8$; 3) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{45^3}$;

2) $\left(-\sqrt[9]{9}\right)^9$; 4) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$; 6) $\left(-2\sqrt[5]{-5}\right)^5$.

304.° Обчисліть:

1) $0{,}3\sqrt[3]{1000}-5\sqrt[8]{256}+6\cdot\left(-\sqrt[10]{6}\right)^{10}$;

2) $\sqrt[5]{14^5}+\left(-2\sqrt{10}\right)^2-\sqrt[7]{-128}$;

3) $\sqrt[4]{2\frac{113}{256}}\cdot\sqrt[5]{-7\frac{19}{32}}+\frac{1}{16}\cdot\sqrt[3]{14^3}-\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{-5}\right)^3$.

305.° Обчисліть:

1) $200\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[5]{-0{,}00032}-\left(-4\sqrt{2}\right)^2$;

2) $\sqrt[3]{8000}\cdot\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}-\left(-\sqrt[5]{8}\right)^5+\sqrt[7]{17^7}$.

306.° При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\sqrt[8]{x+6}$; 3) $\sqrt[4]{y(y-1)}$; 5) $\sqrt[6]{-x^2}$;

2) $\sqrt[9]{a-10}$; 4) $\sqrt[6]{-x}$; 6) $\sqrt[10]{x^2+2x-8}$?

307.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[4]{x-2}$; 2) $y=\sqrt[7]{4-x}$; 3) $y=\sqrt[12]{2x-x^2}$; 4) $y=\frac{1}{\sqrt[8]{x^2-4x+4}}$.

308.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 = 27$; 4) $x^4 = 16$; 7) $27x^3 - 1 = 0$;

2) $x^5 = 9$; 5) $x^6 = 5$; 8) $(x - 2)^3 = 125$;

3) $x^7 = -2$; 6) $x^4 = -81$; 9) $(x + 5)^4 = 10\,000$.

309.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^9 = 1$; 2) $x^8 = 12$; 3) $x^{10} = 1$;

4) $x^{18} = 0$; 6) $x^6 = -64$; 8) $(2x + 1)^3 = 8$;
5) $x^5 = -32$; 7) $64x^5 + 2 = 0$; 9) $(x - 3)^6 = 729$.

310.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 9$; 4) $\sqrt[3]{x} = -6$; 7) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$;

2) $\sqrt[3]{x} = \frac{4}{5}$; 5) $\sqrt[6]{x} = -2$; 8) $\sqrt[3]{2x+7} = 0$;

3) $\sqrt[4]{x} = 3$; 6) $\sqrt[8]{x} = 0$; 9) $\sqrt[3]{2x+7} = 7$.

311.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x} = -2$; 3) $\sqrt[5]{x} = -2$; 5) $\sqrt[4]{3x-2} = 0$;

2) $\sqrt[4]{x} = -2$; 4) $\sqrt[4]{3x} - 2 = 0$; 6) $\sqrt[4]{3x-2} = 2$.

312.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^8 - 82x^4 + 81 = 0$; 2) $x^6 + x^3 - 56 = 0$; 3) $x^{12} + x^6 - 12 = 0$.

313.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^6 - 25x^3 - 54 = 0$; 2) $x^8 + 13x^4 - 48 = 0$.

Готуємося до вивчення нової теми

314. При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt{a^2} = a$; 2) $\sqrt{a^2} = -a$?

315. Замініть вираз тотожно рівним, який не містить знака кореня:

1) $\sqrt{b^2}$; 2) $-0{,}4\sqrt{c^2}$; 3) $\sqrt{a^6}$; 4) $\sqrt{m^8}$.

316. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{m^2}$, якщо $m > 0$; 4) $\sqrt{0{,}36k^2}$, якщо $k \leqslant 0$;

2) $\sqrt{n^2}$, якщо $n < 0$; 5) $\sqrt{c^{12}}$;

3) $\sqrt{16p^2}$, якщо $p \geqslant 0$; 6) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, якщо $b \leqslant 0$.

317. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{0{,}64 \cdot 36}$; 2) $\sqrt{6^2 \cdot 3^4}$; 3) $\sqrt{\frac{81}{100}}$; 4) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$.

318. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$; 3) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{26}$; 5) $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{147}}$;

2) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0{,}18}$; 4) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3^3}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$; 8) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}$.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 11 на с. 317.

12. Властивості кореня n-го степеня

Розглянемо теореми, які виражають властивості кореня n-го степеня.

Теорема 12.1 (корінь із степеня). ***Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{N}$ виконуються рівності:***

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}$$

$$\boxed{\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}$$

Доведення. ⊙ Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, достатньо показати, що $y^{2k+1} = x$. Тоді перша з рівностей, що доводяться, є очевидною.

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k]{x} = y$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^{2k} = x$. Маємо: $|a| \geqslant 0$ і $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ▲

Теорема 12.2 (корінь з добутку). ***Якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

Доведення. ⊙ Для того щоб довести рівність $\sqrt[n]{x} = y$, де $x \geqslant 0$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^n = x$.

Маємо: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ і $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Крім того,

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab. \ ▲$$

Теорема 12.3 (корінь з дробу). ***Якщо $a \geqslant 0$ і $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 12.4 (степінь кореня). ***Якщо $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

Доведення. ⊙ Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множників}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множників}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ▲

Теорема 12.5 (корінь з кореня). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}$$

Доведення. ⊙ Маємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right)^{k} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k} = a$. ▲

Теорема 12.6. ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}}$$

Доведення. ⊙ Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ▲

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt[4]{(-7,3)^4}$; 2) $\sqrt[6]{1,2^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 625}$.

Розв'язання

1) $\sqrt[4]{(-7,3)^4} = |-7,3| = 7,3$.

2) $\sqrt[6]{1,2^{12}} = 1,2^2 = 1,44$.

3) $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 625} = \sqrt[4]{0,0081} \cdot \sqrt[4]{625} = 0,3 \cdot 5 = 1,5$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть значення виразу: 1) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; 2) $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}}$.

Розв'язання

1) Замінивши добуток коренів коренем з добутку, дістанемо:

$$\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{16 \cdot 2} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

2) Замінивши частку коренів коренем з частки (дробу), матимемо:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{375}} = \sqrt[3]{\frac{24}{375}} = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}.$$

ПРИКЛАД 3 Спростіть вираз: 1) $\sqrt[4]{a^{28}}$; 2) $\sqrt[6]{64a^{18}}$, якщо $a \leqslant 0$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 4) $\sqrt[4]{a^{12}}$; 5) $\sqrt[6]{a^2}$; 6) $\sqrt[6]{a^6b^6}$, якщо $a \geqslant 0$ і $b \leqslant 0$.

Розв'язання

1) За теоремою про корінь зі степеня маємо:

$$\sqrt[4]{a^{28}} = \sqrt[4]{(a^7)^4} = |a^7| = \begin{cases} a^7, & \text{якщо } a \geqslant 0, \\ -a^7, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

2) Маємо $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3|$. Оскільки за умовою $a \leqslant 0$, то $a^3 \leqslant 0$. Тоді $\sqrt[6]{64a^{18}} = 2|a^3| = -2a^3$.

3) З умови випливає, що $a \geqslant 0$. Застосовуючи теореми 12.5 і 12.1, можна записати: $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

4) $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|$.

5) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$.

6) Ураховуючи, що $a \geqslant 0$ і $b \leqslant 0$, можна записати:

$$\sqrt[6]{a^6b^6} = \sqrt[6]{(ab)^6} = |ab| = |a||b| = a(-b) = -ab.$$

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \sqrt[6]{x^6} + x$.

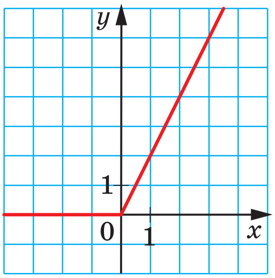


Рис. 80

Розв'язання. Оскільки $\sqrt[6]{x^6} = |x|$, то $y = |x| + x$.

Якщо $x \geqslant 0$, то $y = x + x = 2x$.

Якщо $x < 0$, то $y = -x + x = 0$.

Отже, $y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ 0, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

Графік функції зображено на рисунку 80.

?

1. Сформулюйте теорему про корінь із степеня.
2. Сформулюйте теорему про корінь з добутку.
3. Сформулюйте теорему про корінь з дробу.
4. Сформулюйте теорему про степінь кореня.
5. Сформулюйте теорему про корінь з кореня.

Вправи

319.° Знайдіть:

1) $\sqrt[3]{64 \cdot 125}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0625 \cdot 81}$;
3) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 7^5}$;
4) $\sqrt[6]{3^{18} \cdot 10^{24}}$;
5) $\sqrt[4]{\dfrac{3^{12} \cdot 11^4}{5^8 \cdot 2^{16}}}$.

320.° Обчисліть:

1) $\sqrt[3]{0{,}064 \cdot 343}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 11^4}$;
3) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5}{2^{10}}}$;
4) $\sqrt[8]{\dfrac{2^{24} \cdot 3^{16}}{5^{16}}}$.

321.° Знайдіть:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$;

2) $\sqrt[3]{0{,}054}\cdot\sqrt[3]{4}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{135}}{\sqrt[3]{5}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$;

5) $\sqrt[6]{3^4\cdot 5^2}\cdot\sqrt[6]{3^8\cdot 5^4}$;

6) $\dfrac{\sqrt[8]{2^{30}\cdot 7^{12}}}{\sqrt[8]{2^6\cdot 7^4}}$;

7) $\sqrt[4]{11-\sqrt{40}}\cdot\sqrt[4]{11+\sqrt{40}}$;

8) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$;

9) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{-9}$;

10) $\dfrac{\sqrt[4]{28}\cdot\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{35}}$.

322.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$;

2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$;

3) $\sqrt[7]{2^{15}\cdot 5^3}\cdot\sqrt[7]{2^6\cdot 5^4}$;

4) $\dfrac{\sqrt[6]{3^{10}\cdot 10^2}}{\sqrt[6]{10^8\cdot 3^4}}$;

5) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$;

6) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$;

7) $\dfrac{\sqrt[3]{256}\cdot\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{12}}$;

8) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{80}$?

323.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[4]{(-13)^4}$; 2) $\sqrt[5]{(-9)^5}$; 3) $\sqrt[6]{(-8)^6}$?

324.° Подайте вираз у вигляді одночлена, якщо $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$:

1) $\sqrt{25a^2}$;

2) $\sqrt[3]{27b^9}$;

3) $\sqrt[4]{625a^{12}b^4}$;

4) $\sqrt[6]{729a^{54}b^{18}}$.

325.° Подайте вираз у вигляді одночлена, якщо $m\geqslant 0$ і $n\geqslant 0$:

1) $\sqrt{49m^2}$;

2) $\sqrt[3]{125n^{15}}$;

3) $\sqrt[6]{0{,}000064m^{30}n^{42}}$;

4) $\sqrt[8]{m^{72}n^{24}}$.

326.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt[5]{a}}$;

2) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$;

3) $\sqrt[27]{b^9}$;

4) $\sqrt[15]{c^6}$;

5) $\sqrt[18]{a^8b^{24}}$;

6) $\sqrt[6]{16}$;

7) $\sqrt[12]{81}$;

8) $\dfrac{\sqrt[10]{x^7}}{\sqrt[10]{x^2}}$;

9) $\dfrac{\sqrt[4]{m^7n^9}}{\sqrt[4]{m^5n^3}}$.

327.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\sqrt{x}}$; 3) $\sqrt[12]{a^3}$; 5) $\sqrt[21]{a^{14}b^7}$; 7) $\sqrt[9]{64}$;

2) $\sqrt{\sqrt{y}}$; 4) $\sqrt[9]{b^6}$; 6) $\sqrt[6]{27}$; 8) $\dfrac{\sqrt[4]{c^3}}{\sqrt[4]{c}}$.

328.° Подайте вираз $\sqrt{a}$ у вигляді кореня:

1) четвертого степеня; 4) чотирнадцятого степеня;
2) шостого степеня; 5) вісімнадцятого степеня;
3) десятого степеня; 6) п'ятдесятого степеня.

329.° Подайте вираз $\sqrt[3]{b}$, $b \geqslant 0$, у вигляді кореня:

1) шостого степеня; 3) п'ятнадцятого степеня;
2) дев'ятого степеня; 4) тридцятого степеня.

330.• При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{a^4} = a$; 4) $\sqrt[3]{a^3} = -a$;

2) $\sqrt[4]{a^4} = -a$; 5) $\sqrt[4]{(a-5)^3} = \left(\sqrt[4]{a-5}\right)^3$;

3) $\sqrt[3]{a^3} = a$; 6) $\sqrt[3]{(a-5)^4} = \left(\sqrt[3]{a-5}\right)^4$?

331.• При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[6]{a^{30}} = a^5$; 2) $\sqrt[6]{a^{30}} = -a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^4$; 4) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

332.• При яких значеннях a і b виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b}$; 4) $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b}$;
2) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{-a} \cdot \sqrt[4]{-b}$; 5) $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{-a} \cdot \sqrt[5]{-b}$?
3) $\sqrt[4]{-ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-b}$;

333.• При яких значеннях x виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{x^2-4} = \sqrt[4]{x-2} \cdot \sqrt[4]{x+2}$;
2) $\sqrt[8]{(x-3)(7-x)} = \sqrt[8]{x-3} \cdot \sqrt[8]{7-x}$;
3) $\sqrt[3]{(x-6)(x-10)} = \sqrt[3]{x-6} \cdot \sqrt[3]{x-10}$;
4) $\sqrt[6]{(x+1)(x+2)(x+3)} = \sqrt[6]{x+1} \cdot \sqrt[6]{x+2} \cdot \sqrt[6]{x+3}$?

334.• Замініть вираз тотожно рівним виразом, який не містить знака кореня:

1) $\sqrt[4]{b^4}$; 3) $\sqrt[3]{a^{18}}$; 5) $\sqrt[8]{m^{16}}$;

2) $-0{,}4\sqrt[6]{c^6}$; 4) $\sqrt[6]{a^{18}}$; 6) $\sqrt[12]{(x-5)^{12}}$.

335.• Замініть вираз тотожно рівним виразом, який не містить знака кореня:

1) $1{,}2\sqrt[10]{x^{10}}$; 2) $\sqrt[6]{y^{12}}$; 3) $\sqrt[12]{n^{36}}$; 4) $\sqrt[14]{(8-y)^{14}}$.

336.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{m^6}$, якщо $m \geqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{n^4}$, якщо $n \leqslant 0$;
3) $\sqrt[4]{16p^4}$, якщо $p \geqslant 0$;
4) $\sqrt[8]{256k^8}$, якщо $k \leqslant 0$;
5) $\sqrt[6]{c^{24}}$;
6) $\sqrt{0{,}25b^{14}}$, якщо $b \leqslant 0$;
7) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, якщо $y \geqslant 0$;
8) $\sqrt{0{,}01a^6b^{10}}$, якщо $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$;
9) $-1{,}2x\sqrt[6]{64x^{30}}$, якщо $x \leqslant 0$;
10) $\dfrac{\sqrt[4]{a^{12}b^{28}c^{32}}}{a^4b^8c^{10}}$, якщо $a > 0$, $b < 0$.

337.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0001b^{20}}$, якщо $b \geqslant 0$;
3) $-5\sqrt{4x^2}$, якщо $x \leqslant 0$;
4) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, якщо $p \geqslant 0$;
5) $-0{,}1\sqrt[6]{1\,000\,000z^{42}}$, якщо $z \geqslant 0$;
6) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$;
7) $ab^2\sqrt[4]{a^{48}b^{36}c^{44}}$, якщо $b \geqslant 0$, $c \leqslant 0$;
8) $-\dfrac{8m^3p^4}{k^2}\sqrt[4]{\dfrac{k^{60}p^{40}}{256m^{12}}}$, якщо $m < 0$, $k > 0$.

338.• При яких значеннях a виконується нерівність:

1) $\sqrt[3]{a^3} \geqslant \sqrt[4]{a^4}$; 2) $\sqrt[5]{a^5} \leqslant \sqrt[6]{a^6}$?

339.• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{a^4} + a$, якщо $a > 0$;
2) $\sqrt[6]{a^6} + \sqrt[3]{a^3}$, якщо $a < 0$;
3) $\sqrt[5]{a^5} + \sqrt[4]{a^4}$;
4) $\sqrt{a^2} - \sqrt[7]{a^7}$.

340.• Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{(x+4)^4} = x+4$;
2) $\sqrt[4]{(1-3x)^8} = (1-3x)^2$;
3) $\sqrt[6]{(x^2-2x-3)^6} = 3+2x-x^2$.

341.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{6}-2\right)^3}$; 2) $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; 3) $\sqrt[9]{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^3}$; 4) $\sqrt[6]{\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$.

342.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$; 2) $\sqrt[10]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}$; 3) $\sqrt[12]{\left(\sqrt{11}-3\right)^3}$; 4) $\sqrt[15]{\left(\sqrt{7}-3\right)^3}$.

343.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt[4]{x^4}-x$, якщо $x \leqslant 0$;
2) $y=2x+\sqrt[6]{x^6}$;
3) $y=\sqrt[8]{(x-2)^8}$;
4) $y=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[4]{x^3}$;
5) $y=\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^2}$;
6) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[6]{x^6}}+2$;
7) $y=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^9}$.

344.•• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt[8]{x^8}-2x$; 2) $y=\sqrt[4]{-x}\cdot\sqrt[4]{-x^3}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x^6}}{x}$.

345.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[6]{x^6}=x-4$; 2) $\sqrt[10]{x^{10}}=6-x$; 3) $2\sqrt[4]{x^4}=x+3$.

346.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[8]{x^8}=x+8$; 2) $\sqrt[12]{x^{12}}=6x-10$.

347.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2$.

348.* Побудуйте графік функції $y=\sqrt[8]{(x+1)^8}+\sqrt{(x-3)^2}$.

Готуємося до вивчення нової теми

349. Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; 3) $\frac{1}{10}\sqrt{200}$; 4) $-0{,}05\sqrt{4400}$.

350. Внесіть множник під знак кореня:

1) $3\sqrt{13}$; 2) $-10\sqrt{14}$; 3) $6\sqrt{a}$; 4) $-\frac{2}{3}\sqrt{54}$.

351. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{75}-6\sqrt{3}$;
2) $5\sqrt{12}-7\sqrt{3}$;
3) $3\sqrt{72}-4\sqrt{2}+2\sqrt{98}$;
4) $3\sqrt{8}+\sqrt{128}-\frac{1}{3}\sqrt{162}$.

352. Спростіть вираз:

1) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})\cdot\sqrt{3}$;
2) $(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)$;
3) $(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})$;
4) $(2-3\sqrt{3})^2$.

353. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{12}{\sqrt{6}}$; 2) $\dfrac{24}{5\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$; 4) $\dfrac{15}{\sqrt{15}-\sqrt{12}}$; 5) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

354. Скоротіть дріб:

1) $\frac{c-9}{\sqrt{c}-3}$;
2) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
3) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;
4) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{5-\sqrt{10}}$;
5) $\frac{13-\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$;
6) $\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;
7) $\frac{4a+4\sqrt{5}}{a^2-5}$;
8) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}$.

355. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\sqrt{17}-4}\cdot\sqrt{\sqrt{17}+4}$;
2) $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$.

356. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{-m^9}$;
2) $\sqrt{a^4b^{13}}$, якщо $a \neq 0$;
3) $\sqrt{4x^6y}$, якщо $x < 0$;
4) $\sqrt{45x^3y^{14}}$, якщо $y < 0$.

357. Внесіть множник під знак кореня:

1) $m\sqrt{7}$, якщо $m \geqslant 0$;
2) $3n\sqrt{6}$, якщо $n \leqslant 0$;
3) $p\sqrt{p^3}$;
4) $x^4y\sqrt{x^5y}$, якщо $y \leqslant 0$.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 12 на с. 318.

13. Тотожні перетворення виразів, які містять корені n-го степеня

Користуючись теоремою про корінь з добутку, перетворимо вираз $\sqrt[4]{48}$:

$$\sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3}.$$

Отже, вираз $\sqrt[4]{48}$ ми подали у вигляді добутку раціонального числа 2 та ірраціонального числа $\sqrt[4]{3}$. Таке перетворення називають ***винесенням множника з-під знака кореня***. У даному випадку було винесено з-під кореня множник 2.

Розглянемо виконане перетворення у зворотному порядку:

$$2\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{48}.$$

Таке перетворення називають ***внесенням множника під знак кореня***.