

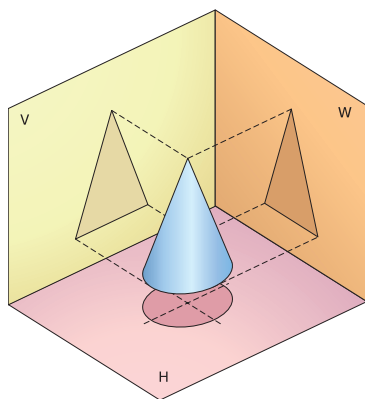
**М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова**

# **ГЕОМЕТРІЯ**

**Підручник для 10 класу  
загальноосвітніх навчальних закладів**

**Академічний рівень**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*



**Київ  
«Зодіак-ЕКО»  
2010**

ББК 22.151я721

Б91

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
(наказ Міністерства освіти і науки України від 3 березня 2010 р., № 177)*

**Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено**

Наукову експертизу проводив *Інститут математики Національної академії наук України*;  
психолого-педагогічна експертизу проводив *Інститут педагогіки  
Національної академії педагогічних наук*;

експерти, які здійснювали експертизу:

*Г. А. Губа* — вчитель-методист ЗОШ І — ІІІ ступенів № 6, м. Ясинувата, Донецька область;

*І. І. Дзюба* — методист Куликівського РМК, Чернігівська область;

*С. І. Остапенко* — вчитель-методист Володимирецького районного колегіуму, Рівненська область;

*В. І. Тоточенко* — доцент кафедри алгебри, геометрії та математичного аналізу

Херсонського державного університету, кандидат педагогічних наук

### **ТВОРЧА ГРУПА РОЗРОБНИКІВ ПІДРУЧНИКА**

**Юрій КУЗНЕЦОВ** — керівник проекту,  
розробник концепцій: дизайну, художнього оформлення;

**Михайло БУРДА, Ніна ТАРАСЕНКОВА** — автори тексту і методичного апарату;

**Олена ПОПОВИЧ** — редактор-організатор;

**Андрій ВІКСЕНКО** — макет, художнє оформлення;

**Валентина МАКСИМОВСЬКА** — організатор виробничого процесу;

**Галина КУЗНЕЦОВА** — економічний супровід проекту;

**Роман КОСТЕНКО** — маркетингові дослідження підручника;

**Андрій КУЗНЕЦОВ** — моніторинг апробації підручника

© Видавництво «Зодіак-ЕКО». Усі права захищені. Жодна частина, елемент, ідея, композиційний підхід цього видання не можуть бути скопійованими чи відтвореними в будь-якій формі та будь-якими засобами — ні електронними, ні фотомеханічними, зокрема ксерокопіюванням, записом чи комп'ютерним архівуванням, — без письмового дозволу видавця.

© М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, 2010

© Видавництво «Зодіак-ЕКО», 2010

© Художнє оформлення.  
А. М. Віксенко, 2010

© Концепції: дизайну, художнього  
оформлення. Ю. Б. Кузнецов, 2010

ISBN 978-966-7090-72-2

# ЗМІСТ

Дорогі учні! ..... 4

**ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ ..... 6**

**Розділ 1. ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ**



- § 1. Основні поняття та аксіоми стереометрії ..... 28
- § 2. Простіші многогранники та їх перерізи ..... 37

**Розділ 2. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ**



- § 3. Взаємне розміщення двох прямих у просторі ..... 50
- § 4. Властивості й ознака паралельних прямих у просторі ..... 58
- § 5. Взаємне розміщення прямої і площини ..... 65
- § 6. Взаємне розміщення двох площин ..... 72
- § 7. Властивості паралельних площин ..... 81
- § 8. Паралельне проектування ..... 90

**Розділ 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ**



- § 9. Перпендикулярність прямої та площини ..... 108
- § 10. Перпендикуляр і похила до площини ..... 114
- § 11. Теорема про три перпендикуляри ..... 122
- § 12. Залежність між паралельністю і перпендикулярністю прямих та площин ..... 130
- § 13. Перпендикулярні площини ..... 136
- § 14. Ортогональне проектування ..... 145

**ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО ..... 157**

**ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ..... 167**

**ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК ..... 174**

## Дорогі учні!

Ви розпочинаєте вивчення стереометрії – розділу геометрії про властивості фігур у просторі. У 9 класі ви ознайомилися з деякими властивостями таких фігур. Знаєте, яке взаємне розміщення у просторі прямих і площин, як знаходити поверхні та об'єми окремих видів многогранників і тіл обертання.

Тепер ви розширите і поглибите свої знання зі стереометрії. Дізнаєтесь про аксіоми стереометрії та наслідки з них, про властивості паралельних та перпендикулярних прямої і площини, двох площин та про їх ознаки, як обчислювати у просторі відстані й кути. Виробите вміння застосовувати вивчені поняття, властивості й ознаки під час розв'язування задач та на практиці. Ви переконаєтесь, що знання і вміння зі стереометрії потрібні багатьом спеціалістам – архітекторам, будівельникам, конструкторам, токарям, фрезерувальникам та ін.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Увесь матеріал поділено на три розділи, а розділи – на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, обведений рамкою. Це – найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. Інші важливі відомості надруковано **жирним** шрифтом. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Згадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання і тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності.

Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (\*) позначено задачі високого рівня. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння і наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання.

У підручнику використано спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.



**Прочитайте**



**Як записати**



**Поміркуйте**



**Як діяти**



**Запам'ятайте**



**Типова задача**

Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового і задоволення від навчання!


# ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ

## У розділі повторите:

- ▶ основні поняття планіметрії;
- ▶ аксіоми – твердження, істинність яких приймають без доведень;
- ▶ основні властивості геометричних фігур та їх ознаки;
- ▶ методи розв'язування геометричних задач



## ОПОРНІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ

 Ви знаєте, що в планіметрії *основними фігурами* є точка і пряма, а *основними відношеннями* – «належати», «лежати між», «накладання». Вони вводяться без означень. Використовуючи ці поняття, ми даємо означення іншим фігурам (променю, відрізку, куту тощо) та відношенням (рівності, подібності, паралельності тощо). Так само, кілька перших тверджень приймають як істинні без доведень. Їх називають *аксіомами*. Всі інші твердження доводять, спираючись на аксіоми, означення понять та раніше доведені теореми.

### АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

- **1.** Існують точки, що лежать на прямій, і точки, що їй не належать.
- **2.** Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.
- **3.** З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.
- **4.** Будь-яка фігура  $F$  накладанням суміщається сама із собою.
- **5.** Якщо фігура  $F_1$  накладанням суміщається з фігурою  $F_2$ , то і фігура  $F_2$  накладанням суміщається з фігурою  $F_1$ .
- **6.** Якщо фігура  $F_1$  накладанням суміщається з фігурою  $F_2$ , а фігура  $F_2$  – з фігурою  $F_3$ , то фігура  $F_1$  накладанням суміщається з фігурою  $F_3$ .

- 7.  $\frac{\text{Довжина}}{\text{Градусна міра}}$  кожного  $\frac{\text{відрізка}}{\text{кута}}$  більша за нуль.
- 8.  $\frac{\text{На промені від його початку}}{\text{Від променя по один бік від нього}}$  можна відкласти тільки один  $\frac{\text{відрізок даної довжини}}{\text{кут даної градусної міри}}$ .
- 9.  $\frac{\text{Довжина відрізка}}{\text{Градусна міра кута}}$  дорівнює сумі  $\frac{\text{довжина відрізків}}{\text{градусних мір кутів}}$ ,  
 на які він розбивається  $\frac{\text{будь-якою його точкою}}{\text{будь-яким променем, що проходить між сторонами кута}}$ .
- 10. (*Аксиома паралельних прямих*). Через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

 Для спрощення викладу планіметрії деякі аксіоми ми не формулювали у підручниках з геометрії для 7 – 9 класів, але ними користувалися.

## КУТИ І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

Два кути називаються *суміжними*, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями (мал. 1). Сума суміжних кутів дорівнює  $180^\circ$ .

Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого (мал. 2). Вертикальні кути рівні.


**Властивості паралельних прямих.** Якщо дві паралельні прямі перетинає третя (мал. 3), то:

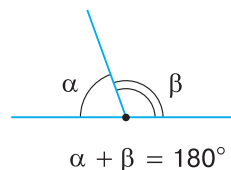
1) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює  $180^\circ$ :

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ;$$

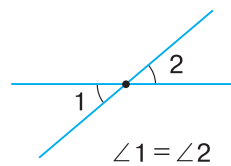
2) внутрішні різносторонні кути рівні:  $\angle 1 = \angle 3$ ;

3) відповідні кути рівні:  $\angle 1 = \angle 4$ .

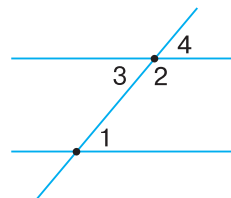
 **Твердження, обернені до тверджень 1) – 3), – це ознаки паралельності прямих.** Сформулюйте їх самостійно.



Мал. 1



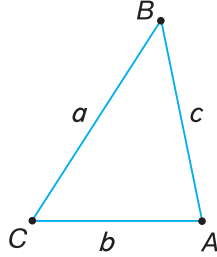
Мал. 2



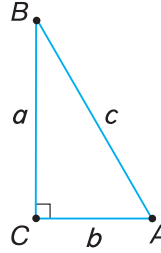
Мал. 3

## ТРИКУТНИКИ. КОЛО

Залежно від міри кутів, трикутники поділяють на гострокутні, тупокутні й прямокутні, а залежно від довжин сторін – на різносторонні, рівнобедрені й рівносторонні.



Мал. 4



Мал. 5

У будь-якому трикутнику  $ABC$  (мал. 4):

- 1)  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  (теорема про суму кутів трикутника);
- 2)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$  (теорема косинусів);
- 3)  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  (теорема синусів), де  $R$  – радіус описаного

кола.

У прямокутному трикутнику  $ABC$  (мал. 5):

- 1)  $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ;
- 2)  $c^2 = a^2 + b^2$  (теорема Піфагора);
- 3)  $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A$ .

Периметр трикутника дорівнює сумі довжин його сторін.

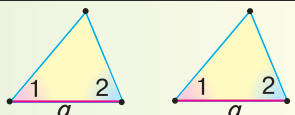
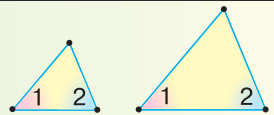
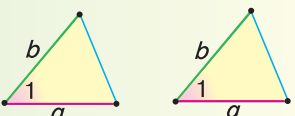
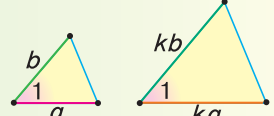
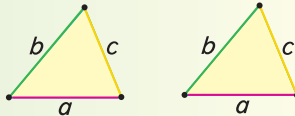
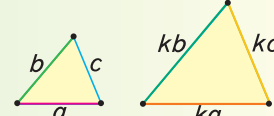
Площу трикутника можна обчислити за формулами:

- 1)  $S = \frac{1}{2} ah_a$ , де  $h_a$  – висота, проведена до сторони  $a$ ;
- 2)  $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ ;
- 3)  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , де  $p$  – півпериметр (формула Герона);
- 4)  $S = pr$ , де  $p$  – півпериметр,  $r$  – радіус вписаного кола;
- 5)  $S = \frac{abc}{4R}$ , де  $R$  – радіус описаного кола.



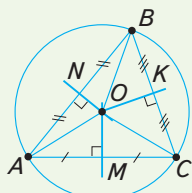
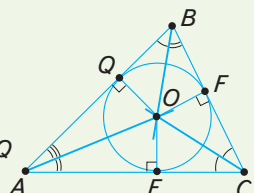
У таблиці 1 подано ознаки рівності й ознаки подібності трикутників. Сформулюйте їх попарно. У чому їх відмінність?

Таблиця 1

Трикутники рівні, якщо:	Трикутники подібні, якщо:
	
	
	

Спираючись на таблицю 2, сформулюйте означення вписаних і описаних трикутників та їх властивості.

Таблиця 2

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА	КОЛО, ВПИСАНЕ У ТРИКУТНИК
 <p>Центр <math>O</math> кола – точка перетину серединних перпендикулярів</p> <p><math>R = OA = OB = OC</math></p> <p>Навколо будь-якого трикутника У будь-який трикутник</p>	 <p>бісектрис кутів</p> <p><math>r = OE = OF = OQ</math></p> <p>можна описати вписати</p> <p>коло і до того ж тільки одне</p>

Довжину кола і площу круга можна обчислити за формулами:  
 $C = 2\pi R = \pi D$ ,  $S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$ , де  $R$  – радіус кола,  $D$  – його діаметр.

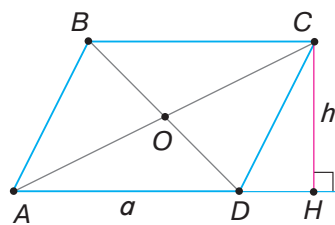
## ЧОТИРИКУТНИКИ

Спираючись на малюнки та скорочені записи, сформулюйте означення й властивості відомих вам чотирикутників.

**Паралелограм  $ABCD$**  (мал. 6):

- 1)  $AD \parallel BC, AB \parallel DC$ ;
- 2)  $AD = BC, AB = DC$ ;
- 3)  $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ ;
- 4)  $AO = OC, BO = OD$ ;
- 5)  $\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle A + \angle D = 180^\circ$ .

Площа паралелограма:  $S = ah$ .

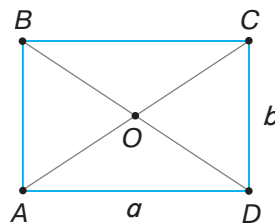


Мал. 6

**Прямокутник  $ABCD$**  (мал. 7):

- 1) усі властивості паралелограма;
- 2)  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ;
- 3)  $AC = BD$ .

Площа прямокутника:  $S = ab$ .

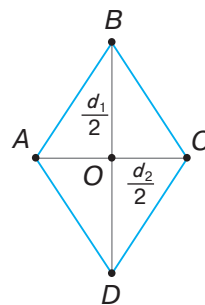


Мал. 7

**Ромб  $ABCD$**  (мал. 8):

- 1) усі властивості паралелограма;
- 2)  $AB = BC = CD = DA$ ;
- 3)  $AC \perp BD$ ;
- 4)  $\angle ABD = \angle CBD, \angle BAC = \angle DAC$ .

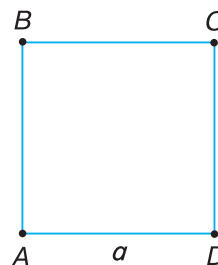
Площа ромба:  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$ .



Мал. 8

**Квадрат  $ABCD$**  (мал. 9): усі властивості паралелограма, прямокутника, ромба.

Площа квадрата:  $S = a^2$ .



Мал. 9

**Трапеція  $ABCD$**  (мал. 10):

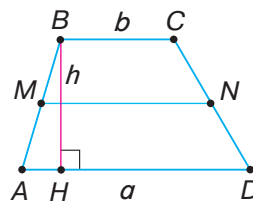
- 1)  $AD \parallel BC$ ;
  - 2)  $MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{AD + BC}{2}$ ,
- де  $MN$  – середня лінія.

Площа трапеції:  $S = \frac{(a + b)h}{2}$ .

**Властивості вписаних і описаних чотирикутників:**

1) у вписаному чотирикутнику  $MNKP$  (мал. 11):  $\angle M + \angle P = 180^\circ, \angle N + \angle K = 180^\circ$ ;

2) в описаному чотирикутнику  $ABCD$  (мал. 11):  $AB + CD = AD + BC$ .



Мал. 10

## МНОГОКУТНИКИ

### Вписані й описані многокутники

Пригадайте означення вписаного многокутника та означення описаного многокутника. Порівняйте ці означення з наведеними у підручнику.

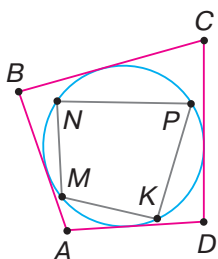
Многокутник називається  $\frac{\text{вписаним у коло}}{\text{описаним навколо кола}}$ ,

якщо всі його  $\frac{\text{вершини лежать на колі}}{\text{сторони дотикаються до кола}}$ .

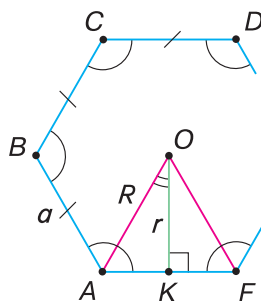
### Правильні многокутники

Спираючись на малюнок 12 та скорочені записи, сформулюйте означення та властивості правильних  $n$ -кутників.

- 1)  $AB = BC = \dots = AF$  і  $\angle A = \angle B = \dots = \angle F$ ;
- 2) точка  $O$  є центром описаного кола і вписаного кола;
- 3)  $\angle AOF = \frac{360^\circ}{n}$ ;
- 4)  $\angle A + \angle B + \dots + \angle F = 180^\circ (n - 2)$ ;
- 5)  $r = \frac{AK}{\operatorname{tg} \angle AOK} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$ ;
- 6)  $R = \frac{AK}{\sin \angle AOK} = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$ .



Мал. 11



Мал. 12

## МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

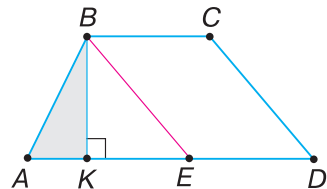
### 1. ВИКОРИСТАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ДОПОМІЖНИХ ТРИКУТНИКІВ.

#### Трикутник або кілька нерівних трикутників



**Задача.** Знайдіть висоту трапеції, якщо її основи дорівнюють  $a$  і  $c$  ( $a > c$ ), а прилегли до основи  $a$  кути дорівнюють  $\alpha$  і  $\beta$ .

**Розв'язання.** Нехай  $ABCD$  – трапеція з основами  $AD = a$ ,  $BC = c$  і  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle D = \beta$  (мал. 13). Проведемо пряму  $BE \parallel CD$ . У  $\triangle ABE$   $AE = a - c$ ,  $\angle BAE = \alpha$ ,  $\angle BEA = \angle CDA = \beta$ .



Мал. 13

За теоремою синусів знаходимо  $AB$ :  $\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AE}{\sin(180^\circ - (\alpha + \beta))}$ ,

$$\text{звідки } AB = \frac{(a - c) \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (1)$$

Проведемо висоту  $BK$  трапеції.  $\triangle ABK$  – прямокутний.

$$\text{Тоді } BK = AB \cdot \sin \alpha. \quad (2)$$

Підставивши рівність (1) у (2), дістанемо:  $BK = \frac{(a - c) \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ .



**Розв'язуючи геометричні задачі, дотримуйтесь такого плану:**

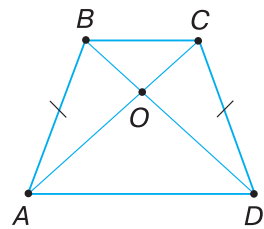
- 1) відшукайте на малюнку трикутник (або утворіть його, провівши потрібні відрізки), який можна розв'язати (у нашій задачі – це  $\triangle ABE$ );
- 2) задача буде розв'язаною, якщо знайдений елемент (сторона  $AB$ ) трикутника задовольняє умову задачі;
- 3) якщо ні, то, враховуючи знайдений елемент, відшукайте на малюнку другий трикутник ( $\triangle ABK$ ). Якщо задачу задовольняє знайдений елемент другого трикутника (висота  $BK$ ), – вона розв'язана. В іншому випадку розгляньте третій трикутник і т. д. доти, поки не дістанете такий трикутник, сторона чи кут якого дає розв'язок задачі.

#### Рівні трикутники



**Задача.** Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

**Розв'язання.** Нехай  $ABCD$  – рівнобічна трапеція (мал. 14). У трикутників  $ABD$  і  $DCA$ :  $AD$  – спільна сторона,  $AB = CD$  за означенням рівнобічної трапеції,  $\angle A = \angle D$  за властивістю рівнобічної трапеції. Отже,  $\triangle ABD = \triangle DCA$  за двома сторонами і кутом між ними. З рівності трикутників випливає, що  $AC = BD$ .



Мал. 14



**Пам'ятайте:**

– щоб довести рівність двох відрізків (кутів):

1) виділіть на малюнку два трикутники, сторонами яких є ці відрізки (кути);

2) доведіть, що ці трикутники рівні;

3) зробіть висновок: відрізки (кути) рівні як відповідні сторони (кути) рівних трикутників.

– якщо в задачі треба знайти певний відрізок (кут), то його корисно розглянути як сторону (кут) одного з двох рівних трикутників.

## Подібні трикутники

Подібні трикутники використовуються під час доведення рівностей, які містять добутки довжин двох пар відрізків.



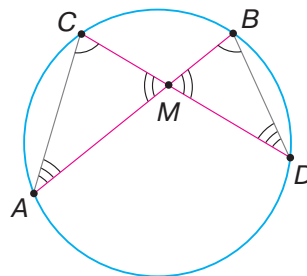
**Задача.** Якщо хорди  $AB$  і  $CD$  кола перетинаються в точці  $M$ , то  $AM \cdot BM = CM \cdot DM$ . Доведіть.

**Розв'язання.** Проведемо аналіз (мал. 15). Припустимо, що рівність, яку треба довести, справедлива. Запишемо її у вигляді пропорції  $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$ . З пропорції випливає, що трикутники

із сторонами  $AM$  і  $CM$ ,  $DM$  і  $BM$  мають бути подібними. Справді, у них  $\angle AMC = \angle DMB$  як вертикальні,  $\angle ACM = \angle DBM$  як вписані, що спираються на дугу  $AD$ . Отже,  $\triangle AMC \sim \triangle DMB$  за двома кутами.

Міркуючи у зворотному напрямі, дістанемо, що  $\triangle AMC \sim \triangle DMB$ .

З подібності цих трикутників випливає пропорційність їх сторін:  $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$ . Звідси  $AM \cdot BM = CM \cdot DM$ .



Мал. 15



**Пам'ятайте:**

– щоб довести рівність добутків двох пар відрізків:

1) припустіть правильність рівності, яку доводите;

2) запишіть її у вигляді пропорції;

3) відшукайте на малюнку (або побудуйте) трикутники, довжини сторін яких є членами утвореної пропорції;

4) обґрунтуйте подібність цих трикутників.

– якщо в задачі треба знайти певний відрізок, то його корисно розглянути як сторону одного з двох подібних трикутників і скласти відповідну пропорцію.

## 2. МЕТОД ПОДІБНОСТІ

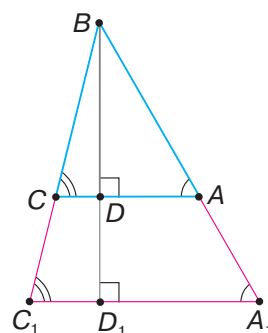
Метод подібності часто застосовують у розв'язуванні задач на побудову.

**Задача.** Побудуйте трикутник за двома кутами  $A$  і  $C$  та висотою  $h$ , проведеною з вершини кута  $B$ .

**Розв'язання.** Знаючи кути  $A$  і  $C$ , спочатку будемо який-небудь трикутник  $A_1BC_1$ , подібний шуканому, взявши довільно відрізок  $A_1C_1$  (мал. 16). Потім будемо висоту  $BD_1$  цього трикутника. На промені  $BD_1$  відкладаємо відрізок  $BD = h$  і через точку  $D$  проводимо  $AC \parallel A_1C_1$ .  $\triangle ABC$  – шуканий.

Справді,  $AC \parallel A_1C_1$ , тому  $\angle A = \angle A_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$  і, отже, два кути трикутника  $ABC$  дорівнюють даним кутам. За побудовою, висота  $BD = h$ . Таким чином,

побудований трикутник  $ABC$  задовольняє всі вимоги задачі.



Мал. 16

**Розв'язуючи задачі на побудову методом подібності:**

- 1) виділіть з умови задачі ті дані, які визначають форму шуканого трикутника (відношення відрізків і кути);
- 2) побудуйте за цими даними допоміжний трикутник, подібний шуканому;
- 3) побудуйте шуканий трикутник, використавши ті дані умови, які визначають його розміри (довжини відрізків).

## 3. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

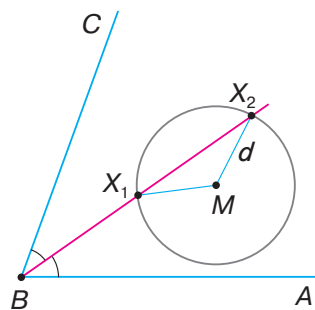
**Задача.** Побудуйте точку в середині кута  $ABC$ , яка рівновіддалена від його сторін і розміщується на відстані  $d$  від точки  $M$ .

**Розв'язання.**

**Аналіз** (мал. 17). Шукана точка  $X$  має задовольняти дві вимоги:

- 1) бути рівновіддаленою від сторін  $\angle ABC$ ;
- 2) лежати на відстані  $d$  від точки  $M$ .

Геометричним місцем точок, що задовольняють першу вимогу, є бісектриса  $\angle ABC$ , а геометричним місцем точок, що задовольняють другу вимогу, є коло з центром  $M$  і радіусом  $d$ . Шукана точка  $X$  лежить на перетині цих геометричних місць.



Мал. 17

**Побудова.** Будуємо: бісектрису  $\angle ABC$ ; коло з центром  $M$  і радіусом  $d$ ;  $X$  — точку перетину бісектриси і кола. Таких точок може бути або дві —  $X_1$  і  $X_2$  (мал. 17), або одна, або жодної.



**Розв'язуючи задачі методом геометричних місць:**

- 1) проаналізуйте умову задачі та виділіть шукану точку;
- 2) з'ясуйте, які дві вимоги вона задовольняє;
- 3) знайдіть геометричне місце точок, що задовольняють: першу вимогу; другу вимогу;
- 4) зробіть висновок: шукана точка — точка перетину знайдених геометричних місць.

## 4. МЕТОД КООРДИНАТ

Розв'язуючи задачу методом координат, дану фігуру слід розміщувати відносно осей координат так, щоб якнайбільше координат потрібних точок дорівнювали нулю, а також одному і тому самому числу. Наприклад, координати вершин прямокутника  $ABCD$  доцільно взяти такі:  $A(0; 0)$ ,  $B(0; b)$ ,  $C(a; b)$ ,  $D(a; 0)$ .



**Задача.** Доведіть, що коли в паралелограма діагоналі рівні, то він — прямокутник.

**Розв'язання.** *Перший крок.* Записуємо задачу мовою координат. Розміщуємо систему координат відносно паралелограма так, щоб його вершини мали координати:  $A(0; 0)$ ,  $B(b; c)$ ,  $C(a + b; c)$ ,  $D(a; 0)$  (мал. 18).

За умовою  $AC = BD$ . Подаємо відстані між точками  $A$  і  $C$ ,  $B$  і  $D$  через їх координати:

$$\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2},$$

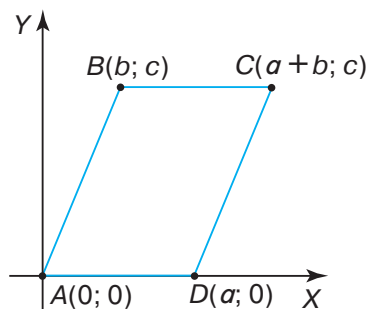
$$(a+b)^2 + c^2 = (a-b)^2 + c^2.$$

*Другий крок.* Перетворюємо одержану рівність:

$$a^2 + 2ab + b^2 + c^2 = a^2 - 2ab + b^2 + c^2,$$

звідси  $4ab = 0$ .

*Третій крок.* З останньої рівності випливає: оскільки  $a > 0$ , то  $b = 0$ . Це означає, що точка  $B(b; c)$  лежить на осі  $OY$ . Тому кут  $BAD$  прямий, а звідси паралелограм  $ABCD$  — прямокутник.





Мал. 18

 Розв'язуючи задачу координатним методом, виконайте три кроки:

- 1) запишіть геометричну задачу мовою координат;
- 2) перетворіть алгебраїчний вираз;
- 3) перекладіть знайдений результат мовою геометрії.

## 5. АЛГЕБРАЇЧНИЙ МЕТОД

 **Задача.** Периметр ромба дорівнює  $2p$ , сума його діагоналей  $m$ . Знайдіть площу ромба.

 **Розв'язання.** Позначимо діагоналі ромба через  $x$  і  $y$  (мал. 19). Тоді, за умовою задачі, матимемо:  $x + y = m$ .

З прямокутного трикутника  $AOD$ :  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2$ , оскільки сторона ромба дорівнює одній четвертій його периметра,  $a = \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$ . Помноживши обидві

частини другого рівняння на 4, дістанемо систему рівнянь:

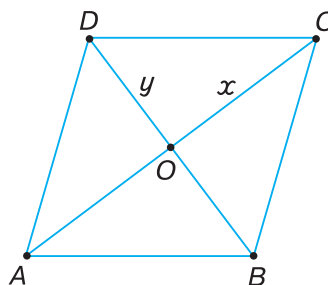
$$\begin{cases} x + y = m, \\ x^2 + y^2 = p^2. \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь визначимо добуток  $xy$ . Для цього піднесемо перше рівняння до квадрата і віднімемо від нього друге рівняння, матимемо:


$$2xy = m^2 - p^2, \text{ звідки } xy = \frac{m^2 - p^2}{2}.$$

Площа ромба дорівнює половині добутку діа-

$$\text{гоналей, отже, } S = \frac{1}{2} xy = \frac{m^2 - p^2}{4}.$$



Мал. 19

 Розв'язуючи задачі алгебраїчним методом, дотримуйтесь таких етапів:

- 1) введіть позначення (буквами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ... найчастіше позначаємо шукані величини);
- 2) складіть рівняння або систему рівнянь, використовуючи відомі геометричні співвідношення між шуканими і даними величинами;
- 3) розв'яжіть складене рівняння або систему рівнянь. Якщо є потреба, то дослідіть знайдені розв'язки.



**ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ**
**МЕТОД ВЕКТОРІВ**


**Задача.** Доведіть, що середня лінія трикутника паралельна стороні й дорівнює її половині.

**Розв'язання.** Нехай  $EF$  — середня лінія трикутника  $ABC$  (мал. 20). Доведемо, що  $EF \parallel AC$  і  $EF = \frac{1}{2} AC$ .

*Перший крок.* Сформулюємо вимогу задачі мовою векторів: позначимо на малюнку вектори  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BF}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{AC}$  і  $\vec{EF}$ .

Тоді вимогу задачі запишемо так:  $\vec{EF} = \frac{1}{2} \vec{AC}$ .

*Другий крок.* За правилом трикутника,  $\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BF}$ .

Перетворимо цю векторну рівність, враховуючи, що

$$\vec{EB} = \frac{1}{2} \vec{AB}, \quad \vec{BF} = \frac{1}{2} \vec{BC} \quad \text{і} \quad \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

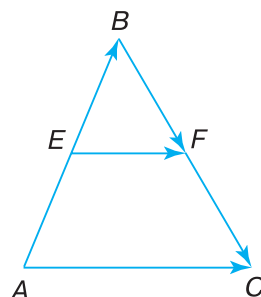
Дістанемо:

$$\vec{EF} = \vec{EB} + \vec{BF} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2} \vec{AC}.$$

*Третій крок.* З останньої векторної рівності  $\vec{EF} = \frac{1}{2} \vec{AC}$  випливає:

1) вектори  $\vec{EF}$  і  $\vec{AC}$  колінеарні і, отже, відрізки  $EF$  і  $AC$  паралельні;

2)  $|\vec{EF}| = \frac{1}{2} |\vec{AC}|$ , або  $EF = \frac{1}{2} AC$ .



Мал. 20



**Щоб застосувати вектори до розв'язування задачі, виконайте три кроки:**

- 1) сформулюйте задачу мовою векторів. Для цього спочатку розгляньте деякі дані у задачі відрізки як вектори. Потім складіть векторну рівність;
- 2) перетворіть векторну рівність, користуючись законами дій над векторами і відомими векторними рівностями;
- 3) перекладіть знайдений результат мовою геометрії.

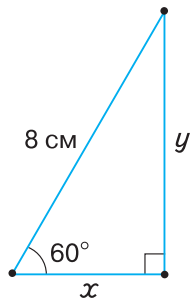

**ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ**

1. Назвіть основні фігури та основні відношення в планіметрії.
2. Сформулюйте аксіоми планіметрії.
3. Які кути називаються суміжними; вертикальними? Які їх властивості?
4. Сформулюйте властивості й ознаки паралельних прямих.

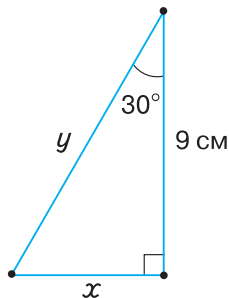
5. Назвіть основні співвідношення між сторонами і кутами довільного трикутника; прямокутного трикутника.
6. За якими формулами можна обчислити площу трикутника?
7. Які є ознаки рівності трикутників? А подібності?
8. Дайте означення паралелограма, прямокутника, ромба, квадрата, трапеції. Які їх властивості?
9. Який багатокутник називається вписаним у коло? Описаним навколо кола?
10. Які властивості трикутника, вписаного у коло, і трикутника, описаного навколо кола? А чотирикутника?
11. Що таке правильний багатокутник та які його властивості?
12. Як використовують під час розв'язування задач допоміжні трикутники (один або кілька нерівних трикутників, рівні трикутники, подібні трикутники)?
13. У чому полягає суть методу подібності? Методу геометричних місць?
14. Назвіть кроки розв'язування задач методом координат.
15. Поясніть суть етапів алгебраїчного методу розв'язування задач.

### 🕒 РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

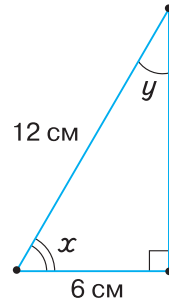
1. За даними на малюнках 21 – 23, знайдіть  $x$  і  $y$ .



Мал. 21

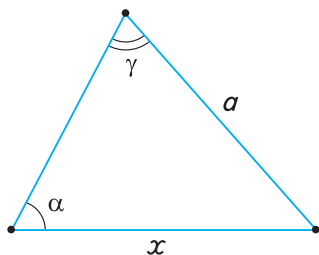


Мал. 22

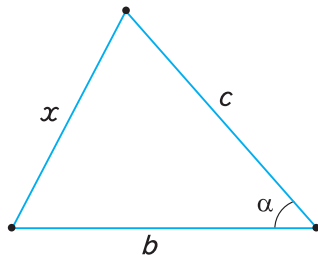


Мал. 23

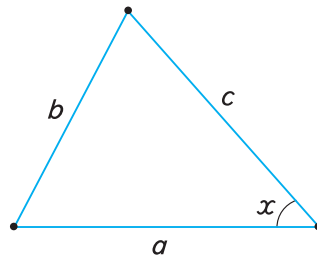
2. За даними, наведеним на малюнках 24 – 26, запишіть формули для обчислення елемента  $x$  трикутника.



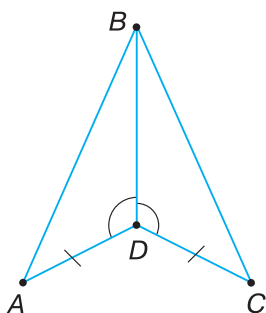
Мал. 24



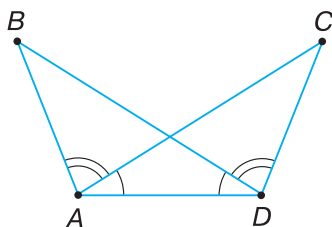
Мал. 25



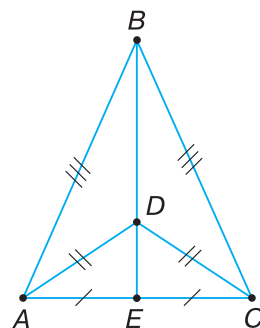
Мал. 26



Мал. 27



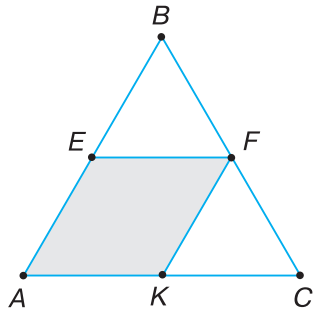
Мал. 28



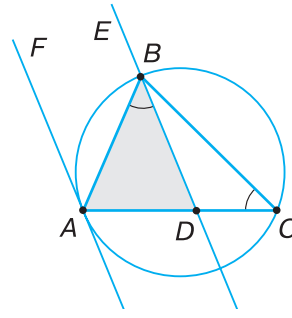
Мал. 29

**Розв'язуючи задачі 3 – 19, використовуйте допоміжні трикутники.**

- 3'.** Знайдіть на малюнках 27 – 29 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.
- 4'.** Сторони одного трикутника дорівнюють  $a$ ,  $b$ , і  $c$ . У подібного трикутника найменша сторона дорівнює  $d$ . Знайдіть його сторони, якщо:
- 1)  $a = 6$  см,  $b = 9$  см,  $c = 12$  см,  $d = 18$  см;
  - 2)  $a = 13$  см,  $b = 7$  см,  $c = 15$  см,  $d = 14$  см;
  - 3)  $a = 9$  см,  $b = 6$  см,  $c = 5$  см,  $d = 10$  см.
- 5°.** Знайдіть кут між діагоналями і більшою стороною прямокутника, якщо його сторони дорівнюють:
- 1) 5 см і 12 см;    2) 6 см і 8 см;    3) 8 см і 15 см.
- 6°.** У паралелограма діагональ  $d$ , сторона  $a$ , а кут між ними  $\alpha$ . Знайдіть невідомі діагональ, сторону і кути паралелограма, якщо:
- 1)  $d = 10$  см,  $a = 6$  см,  $\alpha = 20^\circ$ ;
  - 2)  $d = 12$  см,  $a = 5$  см,  $\alpha = 35^\circ$ ;
  - 3)  $d = a = 5$  см,  $\alpha = 32^\circ$ .
- 7°.** Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ , яка є серединою кожного з них. Знайдіть:
- 1) відрізок  $BC$ , якщо  $AD = 7$  см;
  - 2) кут  $ABC$ , якщо  $\angle BAD = 72^\circ$ .
- 8°.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює  $b$ , а бічна сторона –  $a$ . У подібного трикутника основа дорівнює  $c$ . Знайдіть його периметр, якщо:
- 1)  $a = 18$  см,  $b = 12$  см,  $c = 6$  см;
  - 2)  $a = 5$  см,  $b = 8$  см,  $c = 12$  см;
  - 3)  $a = 25$  см,  $b = 14$  см,  $c = 28$  см.
- 9.** У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута, а основи дорівнюють  $a$  і  $b$ . Знайдіть периметр трапеції, якщо:
- 1)  $a = 5$  см,  $b = 9$  см;
  - 2)  $a = 8$  см,  $b = 4$  см.
- 10.** Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції взаємно перпендикулярні, то середня лінія трапеції дорівнює її висоті.

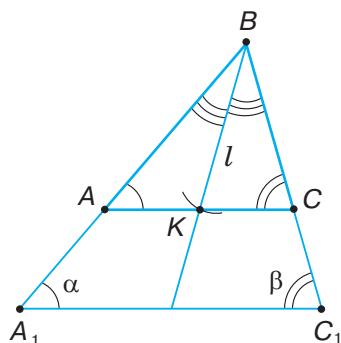


Мал. 30

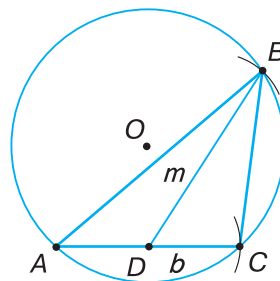


Мал. 31

11. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону навпіл, а менша його діагональ дорівнює 12 см.  
Знайдіть:
  - 1) кути ромба;
  - 2) периметр ромба.
12. Через точку  $O$  перетину діагоналей паралелограма  $ABCD$  проведено пряму, яка перетинає сторони  $BC$  і  $AD$  у точках  $M$  і  $N$ .
  - 1) Доведіть, що  $OM = ON$ ;
  - 2) знайдіть сторони  $AD$  і  $BC$  паралелограма, якщо  $BM = 4$  см,  $AN = 6$  см.
13. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику:
  - 1) бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні;
  - 2) медіани, проведені з цих самих вершин, також рівні.
14. У рівносторонній трикутник вписано ромб, який має з ним спільний кут (мал. 30).
  - 1) Доведіть, що сторона ромба дорівнює половині сторони трикутника;
  - 2) знайдіть периметр ромба, якщо периметр трикутника дорівнює 18 см.
15. Якщо з точки  $M$  поза колом проведено дві січні, що перетинають коло відповідно в точках  $A, B, C$  і  $D$ , то  $AM \cdot BM = CM \cdot DM$ .  
Доведіть.
16. Якщо з точки  $M$  поза колом проведено січну, що перетинає коло в точках  $A$  і  $B$ , та дотичну, що дотикається до кола в точці  $C$ , то  $CM^2 = AM \cdot BM$ .  
Доведіть.
17. Сума кутів при одній з основ трапеції дорівнює  $90^\circ$ . Доведіть, що висота трапеції є середнім пропорційним між проекціями її бічних сторін на основу.
- 18\*. Доведіть, що медіана трикутника  $ABC$ , проведена з вершини  $A$ , менша від півсуми сторін  $AB$  і  $AC$ .
- 19\*. Трикутник  $ABC$  вписаний у коло (мал. 31). Через вершину  $A$  проведено дотичну до кола, через  $B$  — пряму, паралельну дотичній і яка перетинає сторону  $AC$  чи її продовження в точці  $D$ . Доведіть, що  $AB^2 = AC \cdot AD$ .



Мал. 32



Мал. 33

**Розв'яжіть задачі 20 – 26 методом подібності.**

- 20'.** Побудуйте відрізок, який є середнім пропорційним між двома відрізками довжиною:
- 1) 9 см і 1 см;
  - 2) 2 см і 8 см;
  - 3) 4 см і 4 см.
- 21'.** Побудуйте трикутник за такими даними:
- 1)  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$ ,  $l_c = 4$  см;
  - 2)  $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle C = 80^\circ$ ,  $h_b = 3$  см;
  - 3)  $\angle B = 40^\circ$ ,  $\angle C = 75^\circ$ ,  $l_a = 5$  см.
- 22.** Побудуйте трикутник за двома кутами  $\alpha$  і  $\beta$  та бісектрисою  $l$  третього кута. За малюнком 32 складіть план побудови.
- 23.** Побудуйте трикутник за двома кутами і медіаною, проведеною з вершини третього кута.
- 24.** Побудуйте трикутник за кутом, відношенням сторін цього кута і проведеною до третьої сторони:
- 1) медіаною;
  - 2) висотою.
- 25.** Побудуйте прямокутний трикутник:
- 1) за відношенням катетів і гіпотенузою;
  - 2) за відношенням катета до гіпотенузи і другим катетом.
- 26\*.** Побудуйте паралелограм за відношенням діагоналей, кутом між діагоналями і стороною.

**Розв'яжіть задачі 27 – 33 методом геометричних місць.**

- 27'.** На прямій  $a$ , яка перетинає сторони даного кута  $A$ , знайдіть точку, рівновіддалену від його сторін.
- 28'.** Побудуйте точку, рівновіддалену від сторін кута  $ABC$  і точок  $M$  і  $K$ .

29. Знайдіть точку, яка знаходиться на відстані  $l$  від прямої  $a$  і на відстані  $m$  від точки  $M$ . Скільки може бути таких точок?
30. Побудуйте коло, що проходить через точку  $A$  і дотикається до прямої  $a$  в точці  $B$ .
31. Побудуйте трикутник за стороною  $b$ , медіаною  $m$ , проведеною до цієї сторони, і радіусом  $R$  описаного кола. За малюнком 33 складіть план побудови.
32. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою  $a$  і радіусом  $R$  описаного кола.
- 33\*. Побудуйте трикутник за стороною  $a$ , проведеною до неї медіаною  $m$  та висотою  $h$ , проведеною до другої сторони.

**Розв'яжіть задачі 34 – 38 методом координат.**

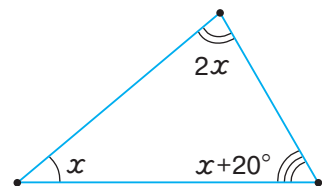
- 34'. Знайдіть довжину відрізка з кінцями в точках:  
 1)  $A(4; -2)$ ,  $B(-2; 6)$ ;  
 2)  $A(4; -2)$ ,  $B(1; 2)$ ;  
 3)  $O(0; 0)$ ,  $D(5; 12)$ .
- 35\*.  $CH$  – висота рівнобедреного трикутника  $ABC$ , проведена до основи  $AB$ . Знайдіть довжину медіани, проведеної до бічної сторони, якщо:  
 1)  $AB = 12$  см,  $CH = 4$  см;  
 2)  $AB = 4$  см,  $CH = 6$  см.
36. Доведіть, що середина гіпотенузи прямокутного трикутника рівновіддалена від його вершин.
37. Якщо чотирикутник  $ABCD$  – прямокутник, то для будь-якої точки  $M$  площини справджується рівність:  $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ . Доведіть.
38. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.
- 39\*. Доведіть, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів бічних сторін, доданій до подвоєного добутку основ.

**Розв'яжіть задачі 40 – 45 алгебраїчним методом.**

- 40'. За даними, наведеними на малюнку 34, знайдіть кути трикутника.
- 41'. Одна сторона трикутника удвічі більша за другу, а третя сторона дорівнює  $a$ . Периметр трикутника дорівнює  $P$ .

Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо:

- 1)  $a = 5$  см,  $P = 35$  см;  
 2)  $a = 7$  см,  $P = 43$  см;  
 3)  $a = 8$  см,  $P = 29$  см.

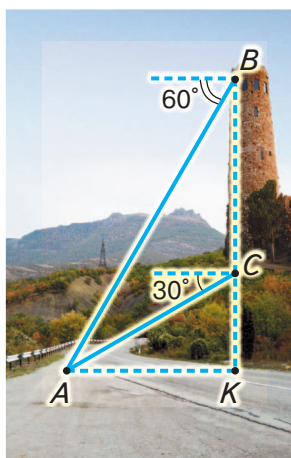


Мал. 34

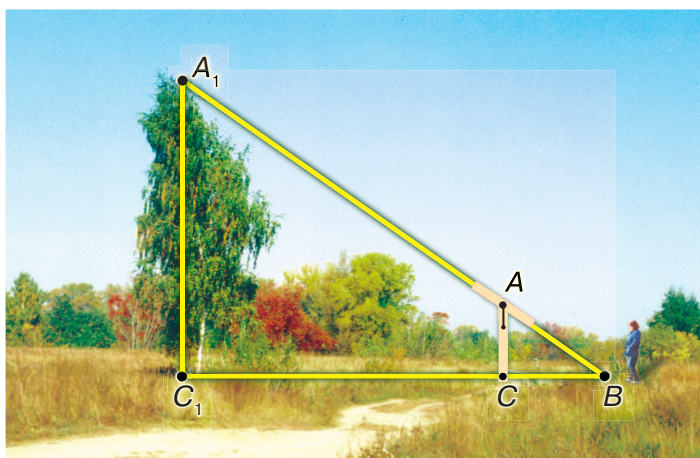
42. Сторони прямокутника відносяться, як  $m : n$ . Складіть формули для знаходження сторін прямокутника, якщо:
- 1) площа дорівнює  $S$ ;
  - 2) периметр дорівнює  $P$ .
43. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 66 см, одна сторона більша за другу на 8 см і на стільки ж менша від третьої, а четверта сторона — в три рази більша за другу.
44. З точки до прямої проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см, а їх проекції відносяться, як 2 : 5.  
Знайдіть:
- 1) проекції похилих;
  - 2) відстань від точки до прямої.
- 45\*. Сума діагоналей ромба дорівнює  $m$ , а його площа  $S$ .  
Знайдіть діагоналі ромба, якщо:
- 1)  $m = 10$  см,  $S = 8$  см<sup>2</sup>;
  - 2)  $m = 26$  см,  $S = 72$  см<sup>2</sup>.

### ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

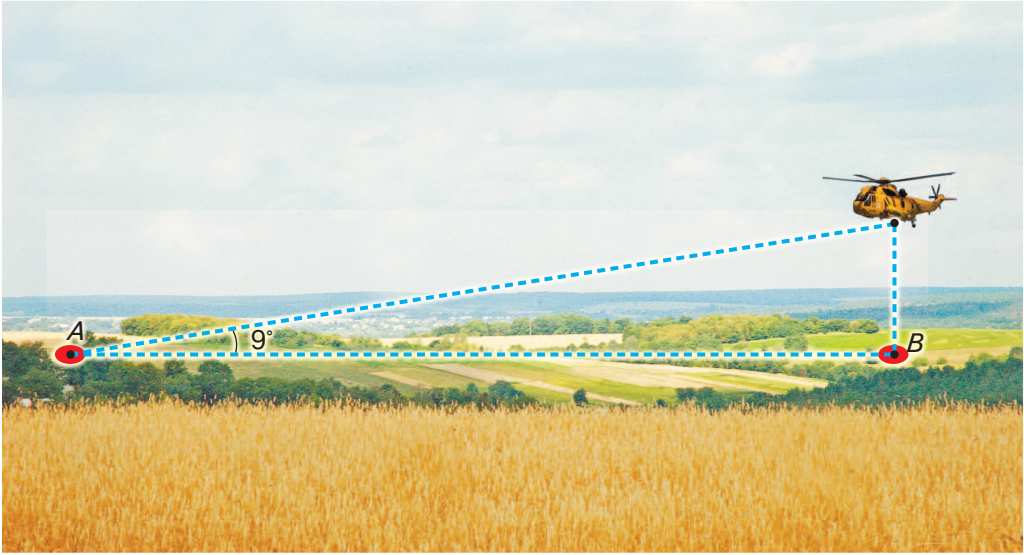
46. На горі знаходиться башта висотою 70 м (мал. 35). Деякий предмет (точка  $A$ ) на підшві гори видно з вершини башти (точка  $B$ ) під кутом  $60^\circ$  до горизонту, а з її основи (точка  $C$ ) — під кутом  $30^\circ$  до горизонту.  
Знайдіть висоту гори.
47. На малюнку 36 показано, як можна виміряти висоту дерева, користуючись віхою з планкою.  
Поясніть вимірювання.



Мал. 35

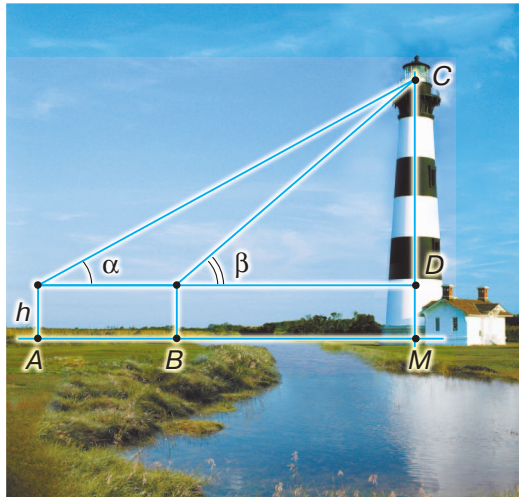


Мал. 36



Мал. 37

48. Спостерігачам, які знаходяться у пункті  $A$ , повідомили, що вертоліт знаходиться над об'єктом  $B$  на висоті 500 м (мал. 37). Вертоліт видно з пункту  $A$  під кутом  $9^\circ$ . Знайдіть відстань від пункту  $A$  до об'єкта  $B$ .
49. Основа щогли недоступна (мал. 38). Знайдіть висоту щогли, якщо  $AB = 10$  м,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$  і висота  $h$  приладу, яким вимірювали кути, дорівнює 1,5 м.



Мал. 38



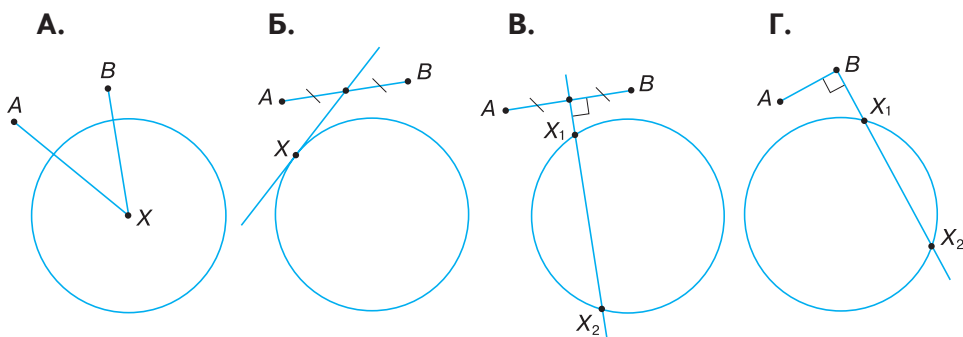
ТЕСТОВЕ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

- 1° Відрізки  $AB$  і  $CD$  перетинаються в точці  $O$ , яка є серединою кожного з них. З рівності яких трикутників випливає, що  $BC = AD$ ?

А.  $\triangle BOC$  і  $\triangle BOD$ . Б.  $\triangle BOC$  і  $\triangle AOC$ . В.  $\triangle ABD$  і  $\triangle ACD$ . Г.  $\triangle BOC$  і  $\triangle AOD$ .

- 2° На даному колі потрібно знайти точку, рівновіддалену від точок  $A$  і  $B$ . Яка з побудов правильна?



- 3° З точки кола проведено перпендикуляр до діаметра. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо його основа ділить діаметр на відрізки 4 см і 9 см.

А. 13 см. Б. 6 см. В. 36 см. Г.  $\sqrt{13}$  см.

- 4 Знайдіть довжину медіани  $AM$  трикутника з вершинами у точках  $A(-1; 4)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(2; -3)$ .

А. 3. Б. 5. В.  $\sqrt{17}$ . Г.  $3\sqrt{2}$  см.

- 5\* У прямокутній трапеції  $ABCD$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) основи  $AD$  і  $BC$  відповідно дорівнюють 10 см і 3 см, а висота дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від середини більшої основи до вершини  $C$ .

А. 5 см. Б. 4 см. В.  $\sqrt{5}$  см. Г.  $2\sqrt{5}$  см.

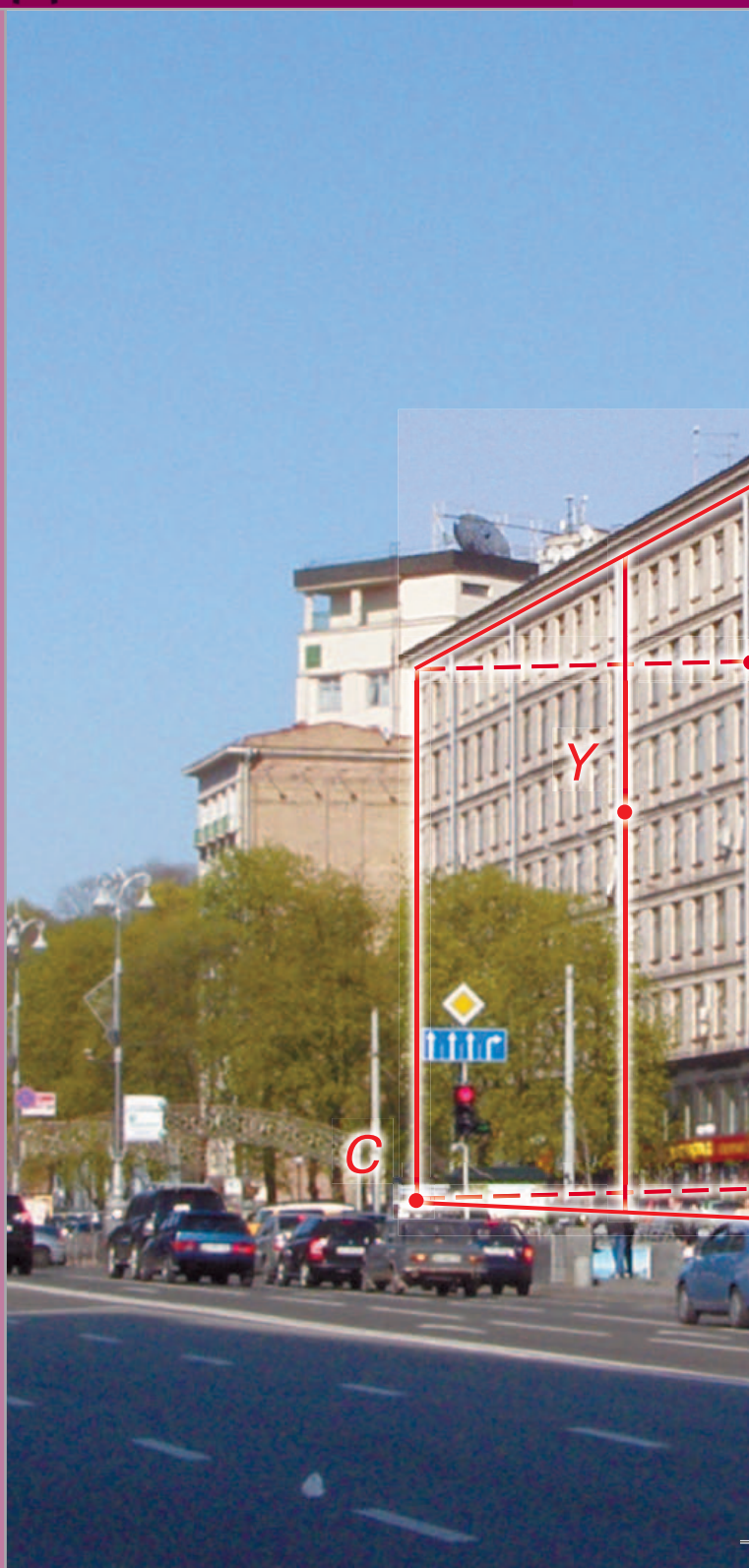
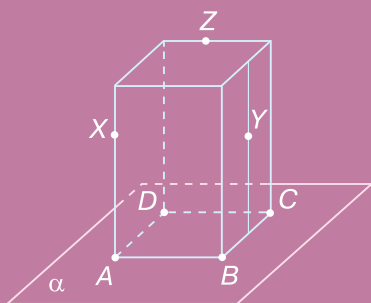
## РОЗДІЛ

# 1

# ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ


### У розділі дізнаєтесь:

- ▶ що вивчає стереометрія;
- ▶ які фігури та відношення вважають основними в стереометрії;
- ▶ про аксіоми стереометрії та наслідки з них;
- ▶ що таке переріз прямої призми (піраміди) та як його побудувати;
- ▶ як застосувати вивчені властивості на практиці та у розв'язуванні задач






# § 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКсіОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

 Ви вже знаєте, що у *стереометрії* вивчають властивості фігур у просторі. Для цього, як і в *планіметрії*, використовують *аксіоматичний метод*. Спочатку обирають *основні поняття* – *основні фігури* та *основні відношення*. Їх тлумачать через приклади, не даючи означень. Також приймають без доведення вихідні істинні твердження – *аксіоми*. Всі інші поняття визначають, а всі інші твердження доводять.



Мал. 39

Основними фігурами у просторі є *точка*, *пряма* і *площина*, а основними відношеннями – відношення «*належати*», «*лежати між*» і «*накладання*». Площину зображають здебільшого у вигляді паралелограма (мал. 39).

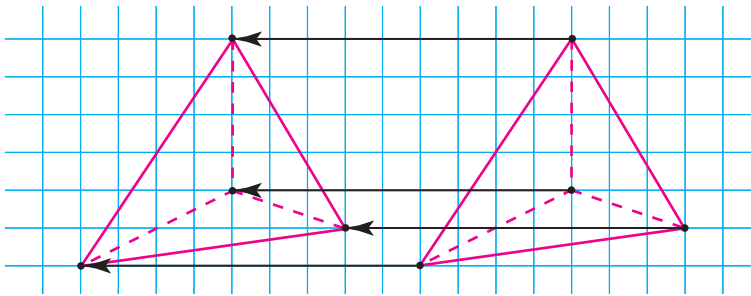
 Як і в *планіметрії*, точки позначають великими латинськими буквами  $A, B, C, \dots$ , прямі – малими латинськими буквами  $a, b, c, \dots$ . Площини позначають малими грецькими буквами  $\alpha$  (альфа),  $\beta$  (бета),  $\gamma$  (гамма) ...

Введення у просторі нової геометричної фігури – площини – потребує уточнення основних відношень та розширення системи аксіом *планіметрії*.

Відношення «*належати*» розглядають не лише для точки і прямої – *точка лежить на прямій*, але й для точки і площини та прямої і площини – *точка (пряма) лежить у площині*.

Відношення «*лежати між*» для трьох будь-яких точок прямої не залежить від її розміщення в просторі, тому це відношення є основним і в *стереометрії*.

Відношення «*накладання*» у просторі розуміють як суміщення фігур відповідно всіма своїми точками (мал. 40).



Мал. 40

Система аксіом стереометрії складається з двох частин. Перша з них включає всі аксіоми планіметрії. Вони виконуються в кожній площині простору.

 **Пам'ятайте:**

- 1) властивості всіх фігур, які ви вивчали в планіметрії, справджуються в кожній площині простору;
- 2) якщо йдеться про дві точки (прямі), то ці точки (прямі) є різними, тобто вони не збігаються.

Друга частина системи аксіом стереометрії включає аксіоми, що характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин. Коротко називатимемо їх *аксіомами стереометрії*. Сформулюємо ці аксіоми.



**Аксіома 1 (належності точки площині).**

Існують точки, що лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній.

На малюнку 41 ви бачите, що точка  $A$  лежить у площині  $\alpha$ , а точка  $B$  не належить їй.



Коротко записуємо:  $A \in \alpha$ ,  $B \notin \alpha$ .



**Аксіома 2 (існування і єдиності площини).**

Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.



Завдяки цій властивості площину можна позначати трьома її точками. Наприклад, на малюнку 42 площина  $ABC$  – це площина  $\alpha$ .

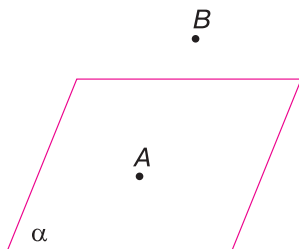


**Аксіома 3 (належності прямої площині).**

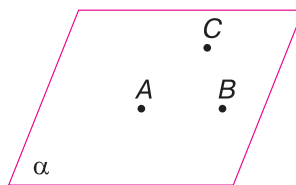
Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.



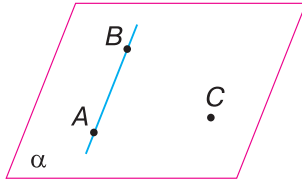
Записуємо: якщо  $A \in \alpha$  і  $B \in \alpha$ , то  $AB$  лежить в  $\alpha$ .



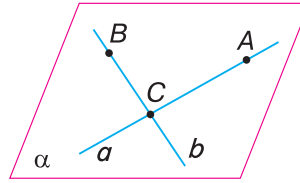
Мал. 41



Мал. 42



Мал. 43



Мал. 44

З наведених аксіом випливають такі наслідки.

### Наслідок 1.

**Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.**

Справді, будь-які дві точки даної прямої разом з даною точкою (мал. 43) утворюють три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить площина і до того ж тільки одна. За аксіомою 3, дана пряма лежить у цій площині.

### Наслідок 2.

**Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.**

Справді, якщо на кожній з даних прямих взяти по одній точці, відмінній від точки перетину даних прямих, та точку перетину (мал. 44), то утвориться три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить площина і до того ж тільки одна. За аксіомою 3, кожна з даних прямих лежить у цій площині.



**Пам'ятайте, що площину можна задати:**

- 1) трьома точками, які не лежать на одній прямій;
- 2) прямою і точкою, яка не лежить на ній;
- 3) двома прямими, що перетинаються.



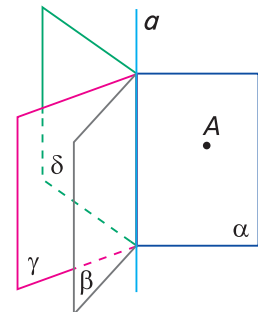
### Аксіома 4 (про перетин двох площин).

Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

### Наслідок 3.

**Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин.**

Справді, через пряму  $a$  і точку  $A$ , що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну. Позначимо її  $\alpha$  (мал. 45). Але, за аксіомою 1, у просторі існує безліч точок, що не лежать у площині  $\alpha$ . Через



Мал. 45

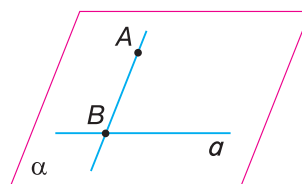
кожну із цих точок і дану пряму можна провести площину, відмінну від площини  $\alpha$ . Тому таких площин безліч.

На малюнку 45 ви бачите, що через пряму  $a$  проходять площини  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  і  $\delta$ .



**Задача.** Дано пряму  $a$  і точку  $A$ , що не лежить на ній. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку  $A$  і перетинають пряму  $a$ , лежать в одній площині.

**Розв'язання.** Через дані точку  $A$  і пряму  $a$ , за наслідком 1 з аксіом стереометрії, проходить площина і до того ж тільки одна. Позначимо її  $\alpha$  (мал. 46). Через точку  $A$  проведемо довільну пряму так, щоб вона перетинала пряму  $a$ . Позначимо точку їх перетину  $B$ . Точки  $A$  і  $B$  лежать у площині  $\alpha$ . Тоді, за аксіомою 3, пряма  $AB$  лежить у площині  $\alpha$ . Аналогічно можна довести, що будь-яка інша пряма, що проходить через точку  $A$  і перетинає пряму  $a$ , лежить у площині  $\alpha$ .



Мал. 46

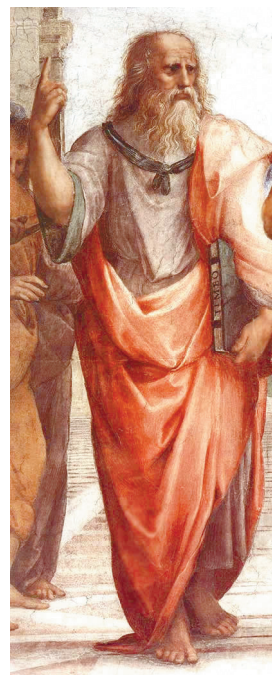


### ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Термін «стереометрія» походить від грецьких слів  $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\omicron\varsigma$  — просторовий і  $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\omicron$  — вимірювати. Його автором вважають давньогрецького вченого Платона (427 — 347 до н. е.) — засновника філософської школи в Афінах, яка мала назву «Академія». Головною заслугою Платона в історії математики вважають те, що він вперше висунув і всіляко відстоював ідею про необхідність знання математики кожною освіченою людиною. На дверях його Академії був напис: «Нехай не входить сюди той, хто не знає геометрії».

2. Ви вже знаєте, що площину можна задати або трьома точками, що не лежать на одній прямій (твердження 1), або прямою і точкою, що не лежить на цій прямій (твердження 2), або двома прямими, що перетинаються (твердження 3). У підручнику перше твердження було прийнято як аксіома, а два інші доведені. Виявляється, що будь-яке із цих тверджень можна обрати за аксіому. Тоді два інших твердження можна довести, спираючись на обрану аксіому.

Наприклад, нехай аксіомою є твердження 3: «Через дві прямі, що перетинаються, можна провести єдину



Рафаель Санті  
Леонардо да Вінчі  
в образі Платона

площину». Доведемо, що через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести єдину площину (твердження 1).

**Доведення.** Нехай точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  не лежать на одній прямій. Проведемо прямі  $AB$  і  $BC$ . Ці прямі перетинаються в точці  $B$ . За прийнятою нами аксіомою, через прямі  $AB$  і  $BC$  можна провести єдину площину. Цій площині належать дані точки  $A$ ,  $B$  і  $C$ .

Твердження 2 спробуйте довести самостійно.

**3.** Якщо з першого твердження випливає друге, а з другого перше, то такі твердження називаються *рівносильними*. Ми довели рівносильність тверджень 1 і 3. Взагалі, рівносильними є всі три наведені твердження. Доведіть це самостійно.

Щоб коротко записати, що деякі твердження рівносильні, їх позначають великими латинськими літерами. Якщо перше з розглянутих тверджень позначити  $T_1$ , друге –  $T_2$ , а третє –  $T_3$ , тоді коротко можна записати:  $T_1 \Leftrightarrow T_2 \Leftrightarrow T_3$ . Знак  $\Leftrightarrow$  заміняє слово «рівносильне».



### ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

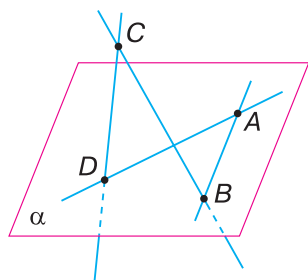
1. Що вивчає стереометрія?
2. Назвіть основні геометричні фігури у просторі. Як їх позначають?
3. Які відношення вважають основними у стереометрії?
4. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
5. Сформулюйте наслідки з аксіом стереометрії.



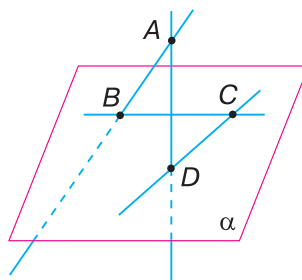
### РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

- 50'.** Які поняття вводять без означень у стереометрії?
- 51'.** Що таке аксіома? Теорема? Наведіть приклади.
- 52'.** Які з наведених фігур є основними в стереометрії:
- |              |               |
|--------------|---------------|
| 1) точка;    | 2) відрізок;  |
| 3) промінь;  | 4) пряма;     |
| 5) кут;      | 6) трикутник; |
| 7) коло;     | 8) ромб;      |
| 9) куб;      | 10) куля;     |
| 11) площина; | 12) призма?   |
- 53'.** Які з наведених відношень є основними в стереометрії:
- 1) належати;
  - 2) перетинати;
  - 3) лежати між;
  - 4) дорівнювати;
  - 5) бути подібним;
  - 6) накладання?



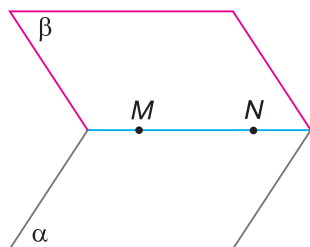


Мал. 47

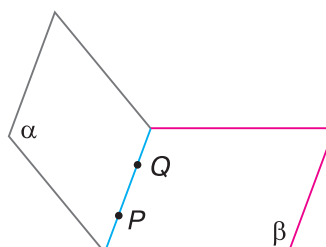


Мал. 48

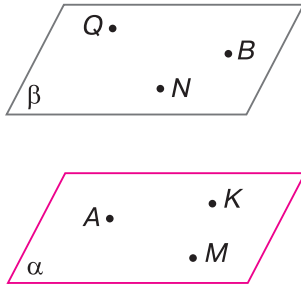
- 54'.** На малюнках 47, 48 зображено площину  $\alpha$  і прямі  $AB$ ,  $BC$ ,  $AD$  і  $CD$ .
- 1) Які з точок  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  лежать у площині  $\alpha$ ?
  - 2) Яку іншу назву можна дати площині  $\alpha$ ?
  - 3) Які з прямих лежать у площині  $\alpha$ ?
- 55'.** За даними на малюнках 49, 50 з'ясуйте:
- 1) які спільні точки мають площини  $\alpha$  і  $\beta$ ;
  - 2) по якій прямій перетинаються площини  $\alpha$  і  $\beta$ .
- 56°.** Назвіть неозначувані поняття стереометрії.
- 57°.** Які з наведених аксіом планіметрії справджуються у просторі:
- 1) через будь-які дві точки можна провести єдину пряму;
  - 2) з будь-яких трьох точок прямої лише одна з них лежить між двома іншими;
  - 3) через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній;
  - 4) на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини і тільки один;
  - 5) кожен відрізок має певну довжину, більшу за нуль;
  - 6) довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин;
  - 7) від будь-якого променя по один бік від нього можна відкласти кут заданої градусної міри і тільки один;
  - 8) кожен кут має градусну міру, більшу за нуль і меншу від  $180^\circ$ ;
  - 9) градусна міра розгорнутого кута дорівнює  $180^\circ$ ;
  - 10) градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається променем, що проходить між його сторонами?



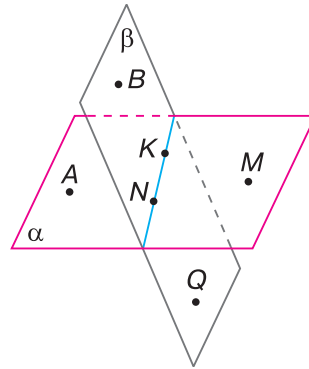
Мал. 49



Мал. 50

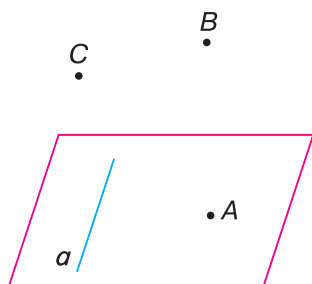


Мал. 51

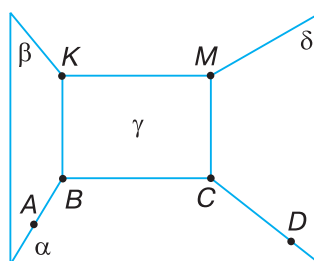


Мал. 52

- 58°.** Сформулюйте аксіоми планіметрії, які справджуються у просторі.
- 59°.** За даними на малюнках 51, 52 визначте точки:
- 1) які лежать у площині  $\alpha$ ;
  - 2) не лежать у площині  $\beta$ ;
  - 3) через які не проходить площина  $\alpha$ ;
  - 4) через які проходить площина  $\beta$ .
- Зробіть відповідний запис.
- 60°.** У площині  $\alpha$  позначте точки  $A, B, C$  і  $D$ , а поза нею — точки  $M$  і  $N$ . Чи можна дати площині  $\alpha$  таку іншу назву:
- 1)  $AN$ ;
  - 2)  $A DB$ ;
  - 3)  $B C D M$ ;
  - 4)  $A C D$ ;
  - 5)  $B A C$ ;
  - 6)  $C N B$ ;
  - 7)  $D A B$ ;
  - 8)  $M D C$ ;
  - 9)  $C A D$ ?
- 61°.** Проведіть площину  $\alpha$ . Позначте:
- 1) точки  $B$  і  $C$ , які лежать у площині  $\alpha$ , і точку  $A$ , що не лежить у цій площині;
  - 2) точки  $A$  і  $C$ , які лежать у площині  $\alpha$ , і точку  $B$ , що не лежить у цій площині.
- Проведіть прямі  $AC, AB, BC$ . Які з цих прямих лежать у площині  $\alpha$ ?  
Зробіть відповідний запис.
- 62°.** Чи можуть пряма і площина мати тільки дві спільні точки? Чому?
- 63°.** Пряма  $a$  і точка  $A$  лежать у площині  $\alpha$  (мал. 53). Точки  $B$  і  $C$  не лежать у даній площині.  
Чи визначають площину, відмінну від площини  $\alpha$ :
- 1) пряма  $a$  і точка  $B$ ;
  - 2) пряма  $a$  і точка  $C$ ;
  - 3) прямі  $AB$  і  $AC$ ;
  - 4) прямі  $AB$  і  $BC$ ?
- Відповідь поясніть.



Мал. 53



Мал. 54

64°. За даними на малюнку 54 заповніть таблицю 3 за зразком, наведеним у другому її стовпчику.

Таблиця 3

Площини	$\alpha \text{ і } \beta$	$\alpha \text{ і } \gamma$	$\alpha \text{ і } \delta$	$\beta \text{ і } \gamma$	$\gamma \text{ і } \delta$
Спільні точки	$A \text{ і } B$				
Спільна пряма	$AB$				

65°. Проведіть площини  $\alpha$  і  $\beta$ , що перетинаються. Позначте точки, які лежать:

- 1) тільки у площині  $\alpha$ ;
- 2) тільки у площині  $\beta$ ;
- 3) у площинах  $\alpha$  і  $\beta$ .

Зробіть відповідний запис.

66. Чи завжди можна провести площину через три довільні точки простору? А через чотири? Відповідь поясніть.

67. Якщо три точки кола лежать у площині  $\alpha$ , то й усі точки кола лежать у даній площині. Доведіть.

68. Чи лежать в одній площині всі прямі, що перетинають сторони даного кута? Відповідь поясніть.

69. Дано два відрізки, що перетинаються:

- 1)  $AC$  і  $BD$ ;
- 2)  $AB$  і  $CD$ .

Чи лежать в одній площині прямі  $BA$ ,  $DC$ ,  $DB$  і  $CA$ ?

Відповідь поясніть.

70. Доведіть, що через пряму можна провести принаймні дві різні площини.

71. Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямою  $a$ . Пряма  $b$  лежить у площині  $\alpha$ .

Ці прямі перетинаються в точці  $B$ . Чи лежить точка  $B$  на прямою  $a$ ?

Відповідь поясніть.

- 72\*.** Доведіть, що існують точки поза даною прямою на площині, в якій лежить дана пряма.
- 73\*.** Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Скільки площин можна провести через:
- 1) усі дані точки;
  - 2) трійки даних точок;
  - 3) пари даних точок?
- Відповідь обґрунтуйте.
- 74\*.** Три площини попарно перетинаються по прямих  $a$ ,  $b$  і  $c$ . Доведіть, що коли ці площини мають спільну точку  $A$ , то прями  $a$ ,  $b$  і  $c$  перетинаються в точці  $A$ .
- 75\*.** Площина  $\gamma$  перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  по прямих  $a$  і  $b$ . Доведіть, що коли прями  $a$  і  $b$  перетинаються, то точка їх перетину лежить на лінії перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$ .
- 76\*.** Дано промені зі спільним початком. Ніякі три з них не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести так, щоб в кожній площині лежало по два з даних променів, якщо всього променів:
- 1) три;
  - 2) чотири;
  - 3)  $n$ ?

### ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 77.** Чому штативи багатьох приладів (фотоапарата, теодоліта тощо) виготовляють у формі триноги?
- 78.** Щоб перевірити, чи є дана поверхня плоскою, до неї прикладають лінійку в різних напрямках. Край лінійки, дотикаючись до поверхні у двох точках, повинен повністю лежати в ній. На чому ґрунтується така перевірка?
- 79.** Перевіряючи, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині, тесля користується двома нитками. Як він робить це?

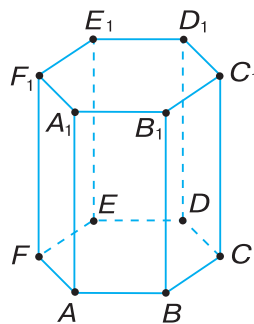


## §2. ПРОСТІШІ МНОГОГРАННИКИ ТА ЇХ ПЕРЕРІЗИ

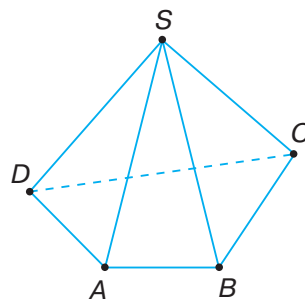
Прикладами просторових фігур є *многогранники*. Ви знаєте два їх види – *пряму призму* (мал. 55) і *піраміду* (мал. 56). Ці геометричні фігури та їх перерізи будемо використовувати для ілюстрації властивостей прямих і площин.

Поверхня многогранника складається з плоских многокутників, які називаються його *гранями*. Звідси і походить назва «многогранник». Грані прямої призми (піраміди) мають спеціальні назви – *бічна грань* та *основа*. Бічними гранями прямої призми є прямокутники, а піраміди – трикутники. У прямої призми дві основи, які є рівними многокутниками, а у піраміди – одна основа. Залежно від того, який многокутник є основою, призму (піраміду) називають *трикутною*, *чотирикутною* чи *n-кутною*. На малюнку 55 ви бачите шестикутну пряму призму  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  з основами  $ABCDEF$  і  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , а на малюнку 56 – чотирикутну піраміду  $SABCD$  з основою  $ABCD$ . Прямокутний паралелепіпед (мал. 57) і куб (мал. 58) є окремими видами чотирикутної прямої призми.

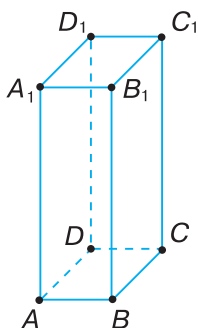
Кожна грань прямої призми (піраміди) лежить у певній площині. На малюнку 59 ви бачите, що точки  $A, B, C$  і  $D$  лежать у площині  $\alpha$ , а точки  $X, Y$  і  $Z$  не належать їй.



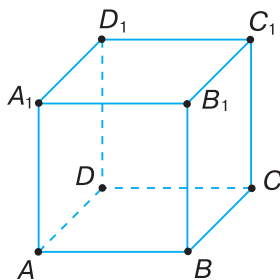
Мал. 55



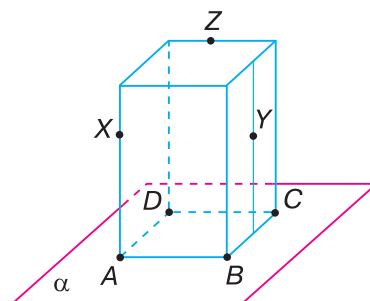
Мал. 56



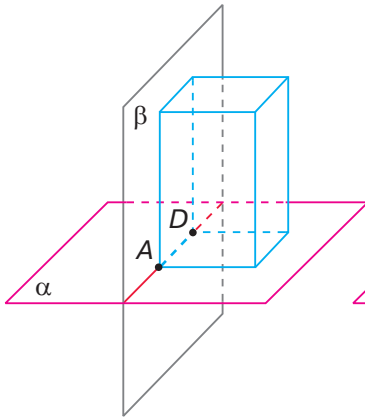
Мал. 57



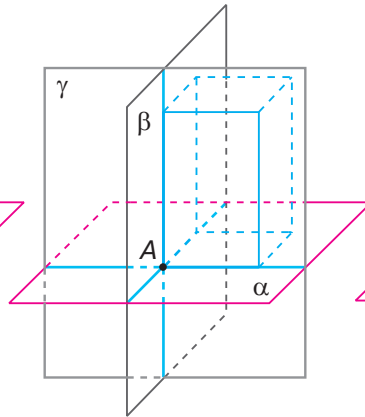
Мал. 58



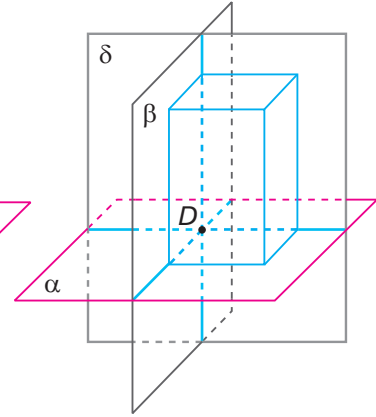
Мал. 59



Мал. 60



Мал. 61



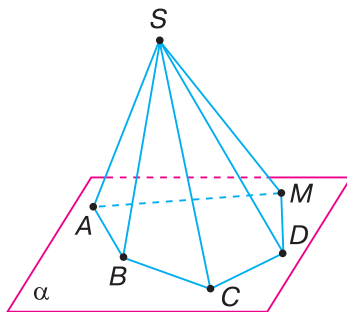
Мал. 62

Різні грані прямої призми (піраміди) лежать у різних площинах. Будь-які дві *сусідні грані* мають спільний відрізок – *ребро* (мал. 60). Воно лежить на прямій перетину двох площин, що містять ці грані. На малюнку 60 ви бачите, що точки ребра  $AD$  належать і площині  $\alpha$ , і площині  $\beta$ . Розрізняють *бічні ребра* і *ребра основ (основи)* прямої призми (піраміди).

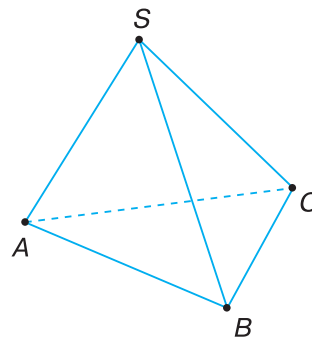
У кожній *вершині* прямої призми сходяться три сусідні її грані (мал. 61 і 62). Наприклад, вершина  $A$  є точкою перетину площин  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$  (мал. 61), а вершина  $D$  – площин  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\delta$  (мал. 62). У прямої призми кожна вершина є вершиною однієї з її основ (верхньої або нижньої), бо у ній сходяться дві сусідні бічні грані й відповідна основа.

У піраміді одна з вершин є особливою – в ній сходяться всі її бічні грані. Вона має спеціальну назву – **вершина піраміди**. На малюнку 63 – це точка  $S$ . Вершина піраміди може бути точкою перетину більше ніж трьох площин, що містять грані піраміди. У вершинах основи піраміди сходяться по три грані – дві сусідні бічні грані й основа.

**?** Чи існує піраміда, в кожній вершині якої сходяться три грані? Так. Це трикутна піраміда (мал. 64).



Мал. 63

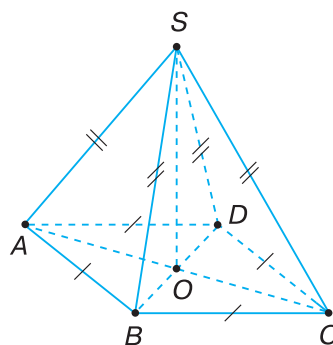


Мал. 64

Пряма призма називається **правильною**, якщо її основа – правильний многокутник.

Піраміда називається **правильною**, якщо її основою є правильний многокутник і її бічні ребра рівні.

**Висотою піраміди** називається перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до її основи. У правильній піраміді висота проходить через центр її основи. На малюнку 65 відрізок  $SO$  – висота правильної чотирикутної піраміди  $SABCD$ .



Мал. 65

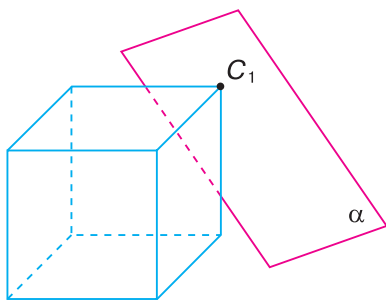
Якщо деяка площина  $\alpha$  не містить грань многогранника, то можливі такі випадки її розміщення відносно многогранника:

- 1) площина  $\alpha$  не має спільних точок з многогранником;
- 2) площина  $\alpha$  має одну спільну точку з многогранником – його вершину (мал. 66);
- 3) площина  $\alpha$  містить лише одне ребро многогранника (мал. 67);
- 4) площина  $\alpha$  перетинає многогранник (мал. 68).

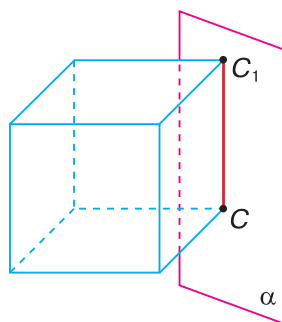


Площина, що перетинає многогранник, називається **січною площиною**.

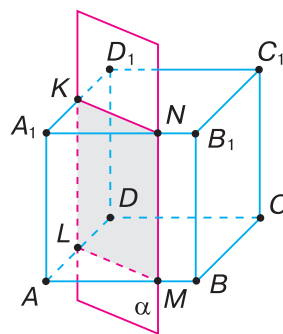
У результаті перетину многогранника січною площиною утворюється **переріз многогранника**. Це плоский многокутник, сторонами якого є відрізки, по яких січна площина перетинає грані многогранника. Тому сторони перерізу лежать у гранях многогранника, а вершини – на ребрах многогранника. На малюнку 68 ви бачите чотирикутник  $KLMN$ , що є перерізом куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  січною площиною  $\alpha$ .



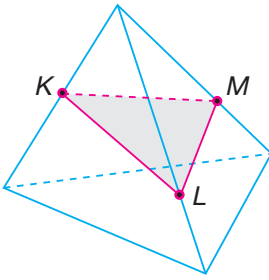
Мал. 66



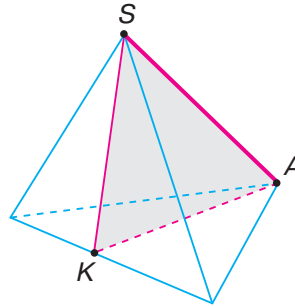
Мал. 67



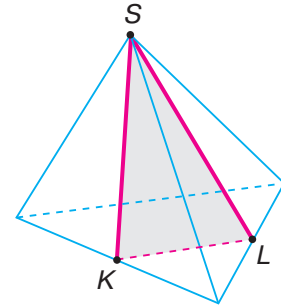
Мал. 68




Мал. 69




Мал. 70




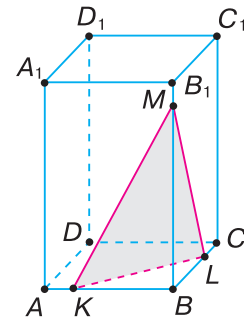
Мал. 71

 Оскільки дві площини не можуть перетинатися більше ніж по одній прямій, то в грані многогранника не може бути більше одного відрізка перетину із січною площиною.


Як і будь-яку площину, січну площину можна задати або трьома точками, що не лежать на одній прямій (мал. 69), або прямою і точкою, що не належить їй (мал. 70), або двома прямими, що перетинаються (мал. 71).

 **Задача.** На ребрах  $AB$ ,  $BC$  і  $BB_1$  прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дано точки  $K$ ,  $L$  і  $M$  (мал. 72). Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через ці точки.

 **Розв'язання.** За умовою, точки  $K$  і  $M$  — спільні точки площини грані  $ABB_1 A_1$  і січної площини. Тому ці площини перетинаються по прямій  $KM$ , а відрізок  $KM$  є відрізком перетину прямокутника  $ABB_1 A_1$  із січною площиною. Міркуючи аналогічно, переконуємося, що січна площина перетинає грані  $ABCD$  і  $BCC_1 B_1$  паралелепіпеда по відрізках  $KL$  і  $ML$ . Проводимо відрізки  $KM$ ,  $KL$  і  $ML$ . Трикутник  $KLM$  — шуканий переріз.



Мал. 72

 Щоб побудувати переріз многогранника січною площиною, треба побудувати відрізки перетину цієї площини з гранями многогранника й отримати плоский многокутник.

### ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У будь-якого опуклого многогранника кількість його вершин ( $B$ ), кількість граней ( $\Gamma$ ) і кількість ребер ( $P$ ) пов'язані такою залежністю:

$$B + \Gamma - P = 2.$$

Цю залежність вперше установив (1620 р.) видатний французький математик Р. Декарт (1596 — 1650), а пізніше (у 1752 р.) заново відкрив і довів німецький



математик Л. Ейлер (1707 – 1783). Відповідна теорема носить ім'я Ейлера. Іноді її називають теоремою Декарта – Ейлера про многогранники. Число  $V + G - P$  називають *ейлеровою характеристикою* многогранника. Ейлерові характеристики широко застосовуються в теорії многогранних поверхонь.

2. Термін «призма» походить від грецького слова  $\pi\rho\iota\sigma\mu\alpha$ , що означає «розпилений». Термін «паралелепіпед» походить від грецьких слів  $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\omicron\varsigma$  – паралельний та  $\epsilon\pi\lambda\epsilon\delta\omicron\nu$  – площина. Термін «куб» ( $\chi\upsilon\beta\omicron\xi$ ) теж античного походження. Таку назву мала гральна кістка з вирізаними на ній вічками. Її виготовляли з баранячого суглоба, який міг падати на чотири грані, але після обточування – на шість граней. Слово «піраміда» вважають чи не єдиним терміном, який дійшов до нас від стародавніх єгиптян. Воно означає «пам'ятник», тобто обеліск, який поставлено славетній людині – фараону.

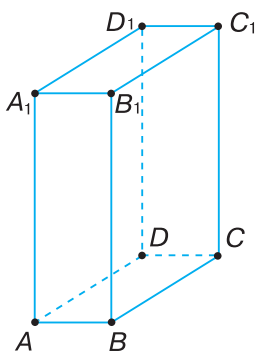
### ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Наведіть приклади просторових фігур.
2. Поясніть, що таке пряма призма; піраміда.
3. Що є основами прямої призми? Її гранями? Ребрами? Вершинами?
4. Що є основою піраміди? Її гранями? Ребрами? Вершинами?
5. Чому призму називають трикутною, чотирикутною,  $n$ -кутною? А піраміду?
6. Яка пряма призма називається правильною? А піраміда?
7. Поясніть, що таке січна площина для многогранника. Як її можна задати?
8. Що є перерізом многогранника?
9. Поясніть, що означає побудувати переріз многогранника.

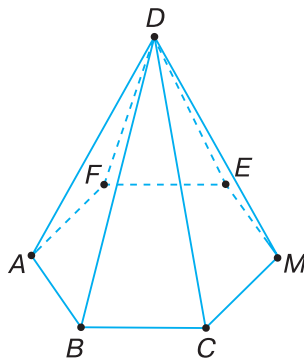
### РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

80'. За малюнками 73 – 75 з'ясуйте:

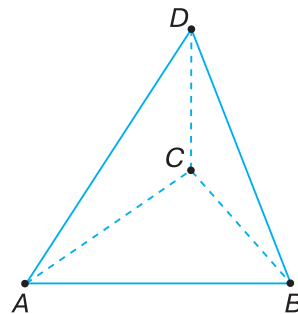
- 1) як називається даний многогранник;
- 2) скільки в нього основ і бічних граней;
- 3) який многокутник є його основою;
- 4) які многокутники є його бічними гранями.



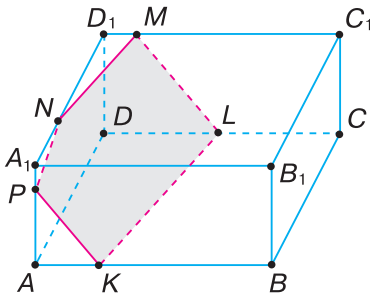
Мал. 73



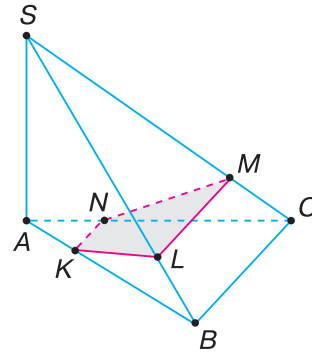
Мал. 74



Мал. 75

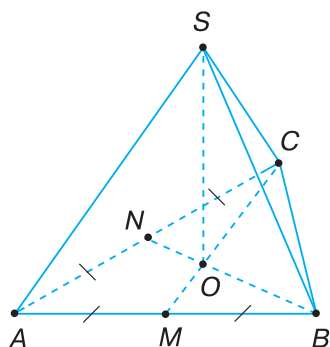


Мал. 76

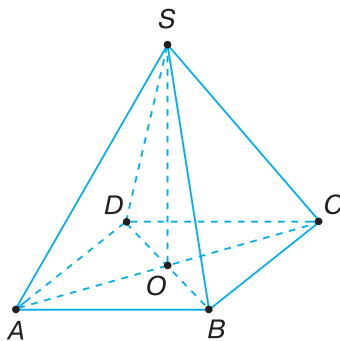


Мал. 77

- 81'.** Назвіть вершини і ребра многогранника (мал. 73 – 75). Які його грані:
- 1) сходяться у вершині:
    - а)  $A$ ; б)  $B$ ; в)  $C$ ;
  - 2) мають спільне ребро:
    - а)  $AB$ ; б)  $CD$ ; в)  $AD$ ?
- 82'.** За малюнками 76, 77 з'ясуйте: 1) яка площина перетинає даний многогранник; 2) по яких відрізках січна площина перетинає його грані; 3) який багатокутник утворився в перерізі.
- 83'.** Дано пряму трикутну призму  $ABCA_1B_1C_1$ . Назвіть площини, кожна з яких проходить через:
- 1) три вершини призми;
  - 2) ребро і вершину призми;
  - 3) два ребра призми, що мають спільну точку.
- 84'.** Дано чотирикутну піраміду  $SABCD$ . Назвіть площини, кожна з яких проходить через:
- 1) три вершини піраміди;
  - 2) ребро і вершину піраміди;
  - 3) два ребра піраміди, що перетинаються.
- 85'.** Чи є правильною пряма призма, якщо її основа:
- 1) квадрат;
  - 2) ромб;
  - 3) трапеція?
- Відповідь поясніть.
- 86'.** Чи можна вважати правильною піраміду, в якій:
- 1) основа – рівнобедрений трикутник, а бічні ребра однакової довжини;
  - 2) основа – правильний трикутник;
  - 3) основа – правильний трикутник, а бічні ребра не однакової довжини;
  - 4) основа – рівносторонній трикутник, а бічні ребра дорівнюють сторонам основи?
- Відповідь поясніть.



Мал. 78



Мал. 79

**87°.** На малюнках 78, 79 зображено правильну піраміду, в якій проведено висоту  $SO$ . Поясніть, як розміщена основа висоти піраміди.

**88°.** Накресліть:

- 1) прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;
- 2) куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Проведіть січну площину через:

- 1) вершини  $A, C, D_1$ ;
- 2) вершини  $B_1, D_1, C$ ;
- 3) ребра  $BC$  і  $A_1 D_1$ ;
- 4) ребра  $AA_1$  і  $CC_1$ .

Який багатокутник дістали в перерізі?

**89°.** Накресліть піраміду:

- 1) трикутну;
- 2) чотирикутну;
- 3) шестикутну.

Позначте середини її бічних ребер і через них проведіть січну площину.

Який багатокутник дістали в перерізі?

**90.** Яку найменшу кількість граней (ребер, вершин) може мати:

- 1) пряма призма;
- 2) піраміда?

**91.** Виведіть формулу для обчислення кількості вершин  $n$ -кутної:

- 1) призми;
- 2) піраміди.

**92.** Виведіть формулу для обчислення кількості ребер  $n$ -кутної:

- 1) призми;
- 2) піраміди.

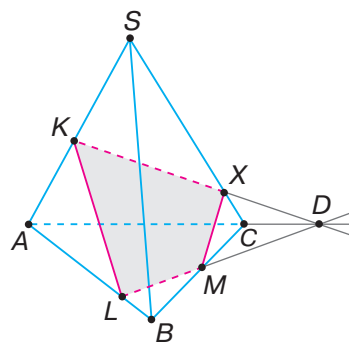
**93.** Виведіть формулу для обчислення кількості граней  $n$ -кутної:

- 1) призми;
- 2) піраміди.

- 94.** Скільки вершин п'ятикутної призми  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$  не лежить:
- 1) на ребрі  $DE$ ;
  - 2) на ребрі  $CC_1$ ;
  - 3) у площині грані  $BCD$ ;
  - 4) у площині грані  $DED_1$ ?
- 95.** Чи залежить кількість вершин (ребер, граней) у призми від того, що її основою є правильний багатокутник?  
А у піраміди?
- 96.** У кубі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  задано точку:
- 1)  $P$  на ребрі  $AA_1$ ;
  - 2)  $Q$  на ребрі  $AD$ .
- Площини яких граней куба перетинає пряма, що лежить у площині грані куба і проходить через дану точку та одну з вершин куба?  
Скільки таких прямих можна провести?
- 97.** У піраміді  $SABCD$  задано точку:
- 1)  $M$  на ребрі  $SA$ ;
  - 2)  $N$  на ребрі  $BC$ .
- Площини яких граней піраміди перетинає пряма, що лежить у площині грані піраміди і проходить через дану точку та одну з вершин піраміди?  
Скільки таких прямих можна провести?
- 98.** Накресліть:
- 1) прямокутний паралелепіпед;
  - 2) куб.
- Через діагональ нижньої основи та вершину верхньої основи проведіть січну площину так, щоб у перерізі дістати:
- а) трикутник; б) чотирикутник.
- 99.** Побудуйте переріз чотирикутної піраміди  $SABCD$  площиною, яка проходить через:
- 1) середини ребер  $SA, AB, AD$ ;
  - 2) середину ребра  $AB$  і медіану грані  $SBC$ ;
  - 3) медіани граней  $SAB$  і  $SBC$ .
- Чи завжди задача має розв'язок?
- 100\*.** Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Назвіть площини, кожна з яких проходить принаймні через три вершини куба.
- 101\*.** На трьох бічних ребрах прямокутного паралелепіпеда розміщено по дві точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходить принаймні через три з даних точок?
- 102\*.** На трьох бічних ребрах чотирикутної піраміди розміщено по три точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходить принаймні через три з даних точок?

**103\*.** На ребрах  $SA$ ,  $AB$  і  $BC$  піраміди  $SABC$  дано точки  $K$ ,  $L$  і  $M$  (мал. 80). Побудуйте переріз піраміди площиною  $KLM$ .

**Розв'язання.** Січна площина  $KLM$  перетинає грані  $SAB$  і  $SBC$  по відрізках  $KL$  і  $LM$ . Щоб побудувати відрізки перетину січної площини з гранями  $SBC$  і  $SAC$ , достатньо на ребрі  $SC$  побудувати точку  $X$ , що належить січній площині. Для цього спочатку знайдемо точку, в якій січна площина перетинає пряму  $AC$ . Прямі  $AC$  і  $LM$  лежать у площині основи піраміди, тому можна побудувати точку  $D$  їх перетину. Ця точка також належить площині  $SAC$ , тому можна побудувати пряму  $KD$ . Вона перетне ребро  $SC$  у шуканій точці  $X$ . Сполучимо точки  $M$  і  $X$ . Чотирикутник  $KLMX$  – шуканий переріз.



Мал. 80

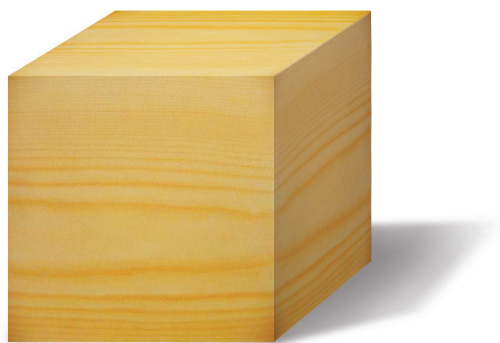
**104\*.** На трьох бічних ребрах піраміди  $SABCD$  позначте по точці, кожна з яких ділить ребро у відношенні  $1 : 2$ . На одному ребрі це відношення рахуйте від вершини піраміди, а на двох інших – від вершини основи. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через дані точки. Скільки розв'язків має задача?

**105\*.** На трьох бічних ребрах куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  позначте по точці, кожна з яких ділить ребро у відношенні  $2 : 5$ . На одному ребрі це відношення рахуйте від вершини верхньої основи куба, а на двох інших – від вершини нижньої основи. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через дані точки. Скільки розв'язків має задача?

### ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

**106.** З дерев'яного кубика треба виточити правильну піраміду:

- 1) чотирикутну; 2) трикутну. Поясніть, як це можна зробити.



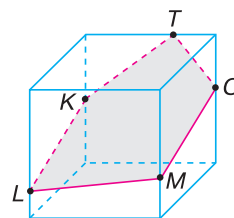
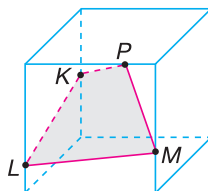
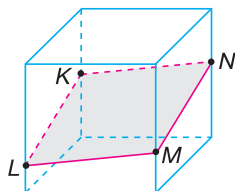
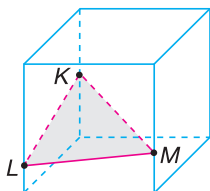
**КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

1. Назвіть основні фігури та основні відношення у просторі.
2. З яких частин складається система аксіом стереометрії?
3. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
4. Як можна задати площину?
5. Поясніть, що таке пряма призма; піраміда.
6. Яка призма називається правильною? А піраміда?
7. Яка площина називається січною площиною для многогранника?
8. Що таке переріз многогранника?
9. Чому січна площина не може перетинати грань многогранника по двох відрізках?
10. Поясніть, як побудувати переріз многогранника січною площиною.

## ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

- 1°** Основними фігурами в стереометрії є:  
**А.** Точка, площина і кут.      **Б.** Точка, пряма і кут.  
**В.** Точка, відрізок і площина.      **Г.** Точка, площина і пряма.
- 2°** Площину можна задати:  
**А.** Трьома точками, що лежать на одній прямій.  
**Б.** Двома точками.  
**В.** Прямою і точкою, що не належить їй.  
**Г.** Прямою і точкою, що лежить на ній.
- 3°** Яка фігура утворюється в перетині грані многогранника із січною площиною?  
**А.** Пряма.      **Б.** Відрізок.      **В.** Промінь.      **Г.** Кут.
- 4** Яке з тверджень не є аксіомою стереометрії?  
**А.** Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і до того ж тільки одну.  
**Б.** Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.  
**В.** Існують точки, що належать даній площині, і точки, що не лежать у ній.  
**Г.** Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.
- 5\*** Треба побудувати переріз куба площиною  $KLM$ . Яка з побудов правильна?



## РОЗДІЛ 2

# ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРИ

### У розділі дізнаєтесь:


- ▶ про взаємне розміщення двох прямих у просторі; прямої і площини та ознаку їх паралельності;
- ▶ як знайти відстань від точки до прямої та між двома паралельними прямими; кут між прямими, що перетинаються;
- ▶ про паралельні площини та їх ознаку і властивості;
- ▶ що таке паралельне проектування та як зображати просторові фігури на площині;
- ▶ як застосувати вивчені означення, ознаки і властивості на практиці та під час розв'язування задач







## §3. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРИ

 Ви знаєте, що дві прямі на площині або мають одну спільну точку, тобто перетинаються, або не мають спільних точок, тобто паралельні.


 Як можуть розміщуватися дві прямі у просторі?

### 1. ДВІ ПРЯМІ МАЮТЬ ОДНУ СПІЛЬНУ ТОЧКУ

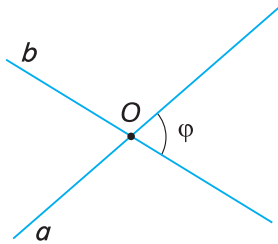
Якщо прямі  $a$  і  $b$  у просторі мають одну спільну точку, то вони *перетинаються* в цій точці (мал. 81).

 Прямі, що перетинаються, позначатимемо так:  $a \times b$ .

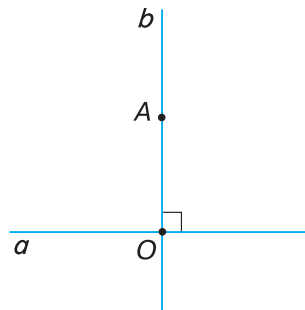
*Кутом* між прямими  $a$  і  $b$  вважається гострий кут, якщо прямі утворюють гострі й тупі кути (мал. 81). Якщо  $\varphi$  – кут між прямими  $a$  і  $b$ , то говорять, що дані прямі *перетинаються під кутом*  $\varphi$ . Якщо прямі  $a$  і  $b$  утворюють прями кути (мал. 82), то кут між прямими дорівнює  $90^\circ$ . Такі прямі називаються *перпендикулярними*.

 Перпендикулярність двох прямих у просторі позначають, як у планіметрії:  $a \perp b$ .

Промені або відрізки, що лежать на перпендикулярних прямих, також вважають перпендикулярними. *Перпендикуляром* до даної прямої у просторі називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, який має одним із своїх кінців точку їх перетину. На малюнку 82 відрізок  $AO$  є перпендикуляром, проведеним з точки  $A$  до прямої  $a$ , точка  $O$  – основа перпендикуляра. Перпендикуляр  $AO$  є найкоротшим з усіх відрізків, що сполучають точку  $A$  з точками прямої  $a$ .



Мал. 81



Мал. 82



**Відстанню від точки до прямої** називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.

На малюнку 82 відстань від точки  $A$  до прямої  $a$  дорівнює довжині перпендикуляра  $AO$ .

## 2. ДВІ ПРЯМІ НЕ МАЮТЬ СПІЛЬНИХ ТОЧОК

Якщо прямі  $a$  і  $b$  у просторі не мають спільних точок, то вони або лежать в одній площині, або не лежать в одній площині.

У курсі геометрії 9 класу ви ознайомилися з такими прямими. Спробуйте дати відповідні означення та порівняйте їх з наведеними у підручнику.



Дві прямі у просторі, що лежать в одній площині і не перетинаються, називаються **паралельними**.  
Дві прямі у просторі, що не лежать в одній площині, називаються **мимобіжними**.

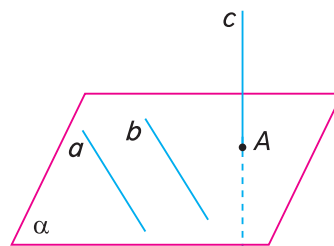
На малюнку 83 прямі  $a$  і  $b$  паралельні, а прямі  $a$  і  $c$  та  $b$  і  $c$  – мимобіжні.



Коротко записуємо:  $a \parallel b$ ,  $a \cdot c$ ,  $b \cdot c$ . Знак « $\cdot$ » заміняє слово «мимобіжні».



Чому в означенні мимобіжних прямих не вказано, що ці прямі не мають спільних точок? Бо відсутність спільних точок у двох прямих є наслідком того, що вони не лежать в одній площині.



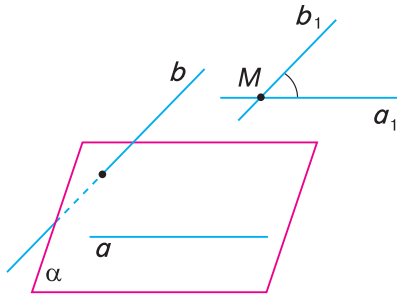
Мал. 83

Правильним є і таке означення. Дві прямі називаються мимобіжними, якщо вони не мають спільних точок і не паралельні.

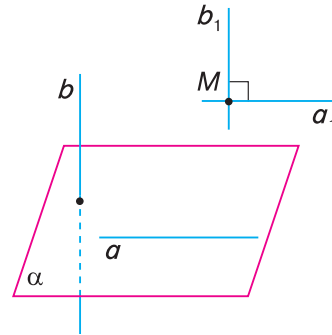
Взаємне розміщення двох прямих у просторі подано в таблиці 4.

Таблиця 4

Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Дві прямі $a$ і $b$	лежать в одній площині	мають одну спільну точку	перпендикулярні $a \perp b$
		не мають спільних точок	не перпендикулярні $a \times b$
	не лежать в одній площині	мають одну спільну точку	паралельні $a \parallel b$
		не мають спільних точок	мимобіжні $a \cdot b$



Мал. 84



Мал. 85

Вважається, що кут між паралельними прямими дорівнює  $0^\circ$ .

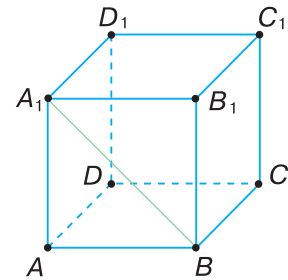
*Кутом між мимобіжними прямими* називається кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим (мал. 84). Цей кут не залежить від вибору прямих, що перетинаються. Твердження буде обґрунтовано у § 13.

Якщо кут між мимобіжними прямими дорівнює  $90^\circ$ , то дані прямі вважають перпендикулярними (мал. 85). Отже, у просторі перпендикулярні прямі можуть або перетинатися, або бути мимобіжними.



**Задача.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб (мал. 86).  
Знайдіть кут між мимобіжними  
прямими  $BA_1$  і  $CC_1$ .

**Розв'язання.**  $CC_1 \parallel BB_1$ , оскільки грань куба –  
квадрат. Тоді кут між мимобіжними прямими  $BA_1$   
і  $CC_1$  дорівнює куту між прямими  $BA_1$  і  $BB_1$ , тобто  
 $45^\circ$ .



Мал. 86

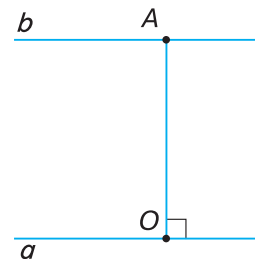


Щоб знайти кут між мимобіжними прямими, можна на одній з них взяти довільну точку і через неї провести пряму, паралельну другій прямій.



**Відстанню між паралельними прямими**  
називається довжина перпендикуляра,  
проведеного з будь-якої точки однієї  
прямої до другої прямої.

На малюнку 87 відстань між паралельними прямими  $a$  і  $b$  дорівнює довжині перпендикуляра  $AO$ .



Мал. 87

 **ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ**

1. Головна праця «Начала» давньогрецького вченого Евкліда побачила світ бл. 300 р. до н. е. У ній підсумовано й приведено у струнку систему всі досягнення грецької математики, зокрема праці Гіппократа Хіосського, Євдокса Кнідського, Архіта Тарентського, Теетета Афінського та інших учених. «Начала» містять 13 книг.

У книгах I – IV подано основи планіметрії.

Книга V містить теорію пропорцій геометричних величин, книга VI – теорію подібності, книги VII – IX – теорію чисел і числових пропорцій, книга X – теорію ірраціональних чисел. Стереометрію викладено у книгах XI – XIII.

Книгу XI присвячено основам стереометрії. У ній Евклід формулює 28 означень і доводить 39 тверджень, які стосуються щонайперше взаємного розміщення прямих і площин у просторі.

Книгу XII присвячено круглим тілам, а книгу XIII – правильним многогранникам.

Історичне значення «Начал» Евкліда полягає в тому, що у них вперше зроблено спробу застосування *аксіоматичного методу* в побудові геометрії. Зараз цей метод є основним для створення й обґрунтування математичних теорій.

2. Вам відомі геометричні характеристики планіметричних фігур. Наприклад, трикутник характеризує довжини його сторін та градусні міри кутів, його периметр і площа. Ці характеристики трикутника не залежать від його розміщення на площині і не змінюються (є інваріантними) при будь-якому переміщенні площини. Такі характеристики фігури називають її *інваріантами*. Не всі інваріанти фігури є незалежними. Наприклад, якщо задано три сторони трикутника, то від їх довжин залежать кути, периметр і площа трикутника і т. д. Незалежні інваріанти фігури називають її *параметрами*. У вас може виникнути запитання: «Які параметри мають дві прями у просторі?»

Дві прями, що перетинаються, мають єдиний параметр – кут між ними.

Дві паралельні прями також мають єдиний параметр – відстань між ними.

Дві мимобіжні прями мають два параметри – кут та відстань між ними.

Чим більше параметрів має фігура, тим загальнішою вона є, бо зі зміною значень параметрів утворюється більше фігур, що відносяться до даного поняття.

Це дає ще одне пояснення того факту, що мимобіжність прямих є загальнішим випадком розміщення двох прямих у просторі. Справді, якщо кут між мимобіжними прямими дорівнює нулю, то дістанемо паралельні прями; якщо відстань між мимобіжними прямими дорівнює нулю, то дістанемо прями, що перетинаються.

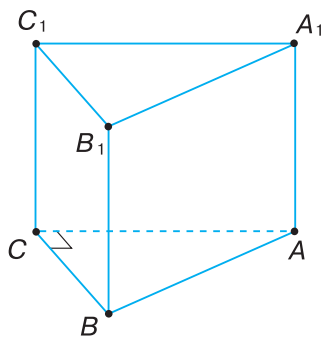
3. Символи « $\times$ », « $\perp$ », « $\parallel$ », « $\cdot$ » для позначення взаємного розміщення двох прямих називають іконічними. Вони наочно відображають суть понять, які позначають.

### ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

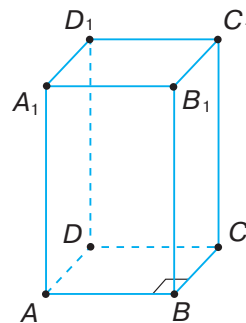
1. Які можливі випадки розміщення двох прямих у просторі?
2. Як у просторі визначають кут між прямими, що перетинаються?
3. Сформулюйте означення відстані від точки до прямої.
4. Які прямі в просторі називаються паралельними? Як їх позначають?
5. Дайте означення мимобіжним прямим. Як їх позначають?
6. Що таке кут між мимобіжними прямими?
7. Поясніть, які прямі в просторі вважаються перпендикулярними.
8. Сформулюйте означення відстані між паралельними прямими.

### РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

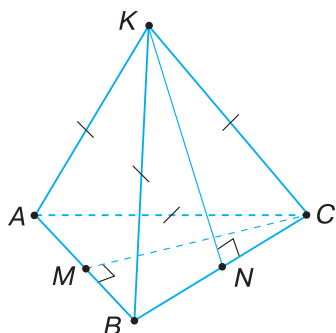
- 107'.** Наведіть приклади взаємного розміщення двох прямих на навколишніх предметах.
- 108'.** На малюнках 88, 89 зображено пряму призму.  
Назвіть прямі, які мають одну спільну точку з прямою:  
1)  $AB$ ; 2)  $BC$ ; 3)  $AC$ .  
В якій точці ці прямі перетинають дану пряму?
- 109'.** Назвіть перпендикулярні прямі на малюнках 88, 89.
- 110'.** Чи зображено перпендикулярні прямі на малюнках 90, 91?
- 111'.** Назвіть пряму і перпендикуляр до неї на малюнках 88 – 91.
- 112'.** Довжина якого відрізка є відстанню від точки  $A$  до прямої  $BC$  (мал. 88 – 91)?
- 113'.** На малюнках назвіть:  
1) паралельні прямі (мал. 88, 89);  
2) мимобіжні прямі (мал. 88 – 91).  
Зробіть відповідний запис.



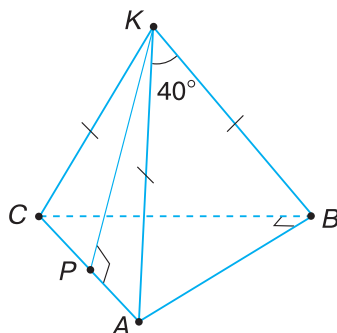
Мал. 88



Мал. 89



Мал. 90



Мал. 91

**114°.** Накресліть куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Запишіть:

- 1) прями, що перетинаються і лежать в площині нижньої основи куба;
- 2) прями, що перетинаються під прямим кутом і лежать в площині верхньої основи куба;
- 3) перпендикулярні прями, що проходять через точку  $A_1$ ;  $C$ ;
- 4) пряму і перпендикуляр, який проведено до цієї прямої з точки  $B$ ;  $D_1$ .

**115°.** Який кут між прямими:

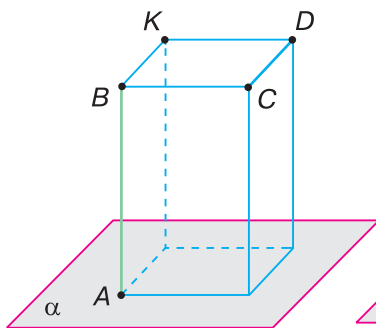
- 1)  $CA$  і  $AK$  (мал. 90);
- 2)  $CA$  і  $AM$ , якщо  $\triangle ABC$  – правильний (мал. 90);
- 3)  $KA$  і  $AB$  (мал. 91);
- 4)  $KC$  і  $KP$ , якщо  $\triangle KCB = \triangle KCA$  (мал. 91)?

**116°.** Вершина верхньої основи прямокутного паралелепіпеда і ребро його нижньої основи лежать в одній бічній грані. Якою може бути відстань від даної вершини до даного ребра паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють:

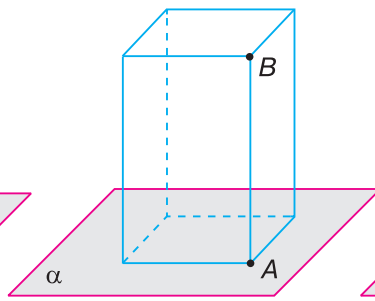
- 1) 3 см, 4 см, 5 см;
- 2) 5 см, 2 см, 2 см;
- 3) 8 см, 8 см, 8 см?

Побудуйте відповідне зображення.

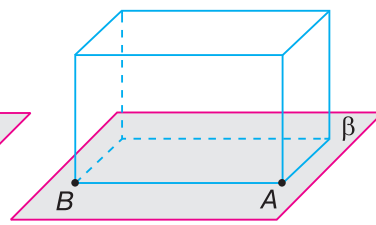
**117°.** У прямокутного паралелепіпеда (мал. 92) ребра  $AB$  і  $CD$  лежать на мимобіжних прямих, а ребра  $CD$  і  $BK$  – на паралельних прямих. На малюнках 93, 94 цей паралелепіпед певним чином повернуто. Скопіюйте малюнки 93, 94 та позначте на них ребра  $CD$  і  $BK$ . Яке взаємне розміщення прямих, на яких лежать ребра  $AB$  і  $CD$ ? А ребра  $CD$  і  $BK$ ?



Мал. 92

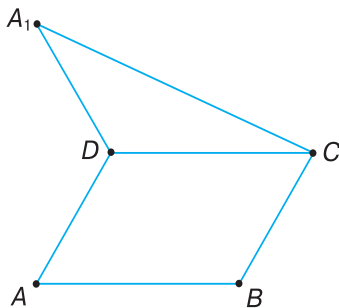


Мал. 93

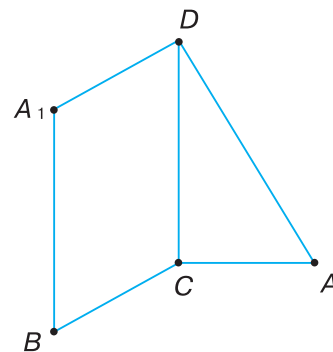


Мал. 94

- 118°.** Як можуть взаємно розміщуватися ребра основи і бічні ребра:  
 1) паралелепіеда;  
 2) трикутної піраміди;  
 3) чотирикутної піраміди?
- 119°.** Назвіть пари ребер призми, що лежать на мимобіжних прямих, якщо призма:  
 1) трикутна;      2) чотирикутна.
- 120°.** Назвіть пари ребер піраміди, що лежать на мимобіжних прямих, якщо піраміда:  
 1) трикутна;      2) чотирикутна.
- 121°.**  $AB$  і  $CD$  – мимобіжні прямі.  
 Чи паралельні прямі: 1)  $AC$  і  $BD$ ; 2)  $AD$  і  $BC$ ?
- 122°.** Дано паралелограм і трикутник, що лежать в різних площинах (мал. 95, 96).  
 Чи є правильним твердження:  
 1) прямі  $AA_1$  і  $BD$  перетинаються;  
 2) прямі  $A_1B$  і  $AD$  можуть бути паралельними;  
 3) прямі  $CA_1$  і  $AD$  – мимобіжні?
- 123°.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – куб. Назвіть пари його ребер, що лежать на перпендикулярних прямих, які:  
 1) перетинаються;    2) є мимобіжними.
- 124°.** Знайдіть відстані між паралельними ребрами прямокутного паралелепіеда, якщо його виміри дорівнюють:  
 1) 4 см, 6 см, 9 см;  
 2) 5 см, 5 см, 5 см;  
 3) 5 см, 12 см, 12 см.
- 125.** Доведіть, що пряма і проведений до неї перпендикуляр лежать в одній площині.
- 126.** Точки  $A$  і  $B$  лежать у площині  $\alpha$ , а точка  $C$  не належить їй. Знайдіть відстань від точки  $C$  до прямої  $AB$ , якщо:  
 1)  $AB = 13$  см,  $BC = 14$  см,  $AC = 15$  см;  
 2)  $AB = 5$  см,  $BC = 6$  см,  $AC = 9$  см.



Мал. 95



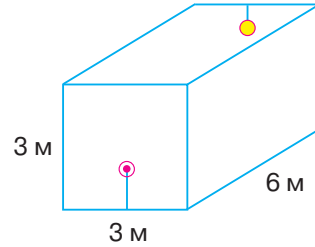
Мал. 96



- 127.** Пряма  $a$  і точка  $A$  лежать у площині  $\alpha$ . Скільки прямих можна провести через точку  $A$ , кожна з яких:
- 1) перетинає пряму  $a$ ;
  - 2) паралельна прямій  $a$ ;
  - 3) мимобіжна з прямою  $a$ ?
- Розгляньте випадки, коли:  $A \in a$ ;  $A \notin a$ .
- 128.** Пряма  $a$  лежить у площині  $\alpha$ , пряма  $b$  перетинає її, але не перетинає пряму  $a$ . Доведіть, що через прямі  $a$  і  $b$  не можна провести площину.
- 129.** У просторі дано три прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$ . Дослідіть, яким може бути взаємне розміщення прямих  $a$  і  $b$  залежно від взаємного розміщення прямих:
- 1)  $a$  і  $c$ ;    2)  $b$  і  $c$ .
- 130.** Скільки пар ребер призми лежать на мимобіжних прямих, якщо призма:
- 1) трикутна;    2) чотирикутна?
- 131.** Скільки пар ребер піраміди лежать на мимобіжних прямих, якщо піраміда:
- 1) трикутна;    2) чотирикутна?
- 132.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб. Знайдіть кут між прямими:
- 1)  $DA_1$  і  $BC_1$ ;    2)  $BA_1$  і  $BC_1$ ;    3)  $AD$  і  $CC_1$ .
- 133.** На прямих  $AD$  і  $BC$  лежать основи трапеції  $ABCD$ . Знайдіть відстань між даними прямими, якщо:
- 1)  $AB = CD = 17$ ,  $AD = 8$ ,  $BC - AD = 16$ ;
  - 2)  $AB = 14$ ,  $AD = 8$ ,  $CD = 15$ ,  $BC = 21$ .
- 134\*.** Доведіть, що якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони або лежать в одній площині, або не лежать в одній площині.
- 135\*.** Якщо дані прямі не проходять через одну точку й кожні дві з них перетинаються, то всі вони лежать в одній площині. Доведіть.
- 136\*.** Вершини чотирикутника не лежать в одній площині. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини його протилежних сторін, перетинаються і в точці перетину діляться навпіл.
- 137\*.** Доведіть, що вершини чотирикутника лежать в одній площині, якщо у нього перетинаються або діагоналі, або продовження двох несуміжних сторін.
- 138\*.** Скільки пар мимобіжних прямих визначають пари з:
- 1) чотирьох точок;
  - 2) п'яти точок;
  - 3)  $n$  точок?
- 139\*.** Дано правильну трикутну призму, в якій бічне ребро вдвічі довше за ребро основи. Знайдіть кут між мимобіжними:
- 1) ребрами;    2) діагоналями граней.
- 140\*.** Знайдіть відстань між паралельними ребрами правильної шестикутної призми, в якій ребро основи дорівнює бічному ребру, що має довжину 5 см.

### ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

141. Як за допомогою двох ниток установити, чи буде стіл з чотирма ніжками стояти на рівній підлозі стійко?
142. На подвір'ї (площина  $\alpha$ ) розміщено колодязь (точка  $A$ ), прокладено доріжку (пряма  $a$ ) і встановлено стовп з ліхтарем (пряма  $b$ ). У площині  $\alpha$  проведіть пряму, яка: 1) перетинає прямі  $a$  і  $b$ ; 2) перетинає пряму  $b$  і паралельна прямій  $a$ ; 3) перетинає прямі  $a$  і  $b$  та проходить через точку  $A$ . Сформулюйте відповідні практичні задачі.
143. Необхідно з'єднати проводкою вимикач і світильник в кімнаті довжиною 6 м, шириною 3 м і висотою 3 м. Вимикач знаходиться посередині торцевої стіни на висоті 1 м від підлоги, а світильник — посередині протилежної стіни на відстані 1 м від стелі (мал. 97). Як треба провести проводку, щоб її довжина була найкоротшою?
144. Як визначити кут між мимобіжними прямими у класній кімнаті?



Мал. 97

## §4. ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРИ

З курсу планіметрії ви знаєте, що через точку, яка не лежить на прямій, можна провести єдину пряму, паралельну даній прямій. Це твердження було прийнято як аксіому в планіметрії. Воно справджується в кожній площині простору. Однак у просторі це твердження потребує доведення.



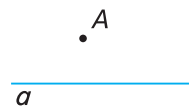
**Теорема (основна властивість паралельних прямих у просторі).** Через точку, яка не лежить на даній прямій, у просторі можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну.

**Дано:** пряма  $a$ , точка  $A$ ,  $A \notin a$  (мал. 98).

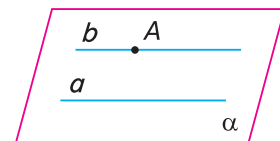
**Довести:** існує тільки одна пряма  $b \parallel a$ , що  $A \in b$ .

**Доведення.** За наслідком 1 з аксіом стереометрії, через пряму  $a$  і точку  $A$  можна провести площину  $\alpha$  і до того ж тільки одну.

У площині  $\alpha$ , за аксіомою паралельних прямих, через точку  $A$  можна провести пряму  $b$ , паралельну прямій  $a$ , і тільки одну (мал. 99). Отже, у просторі через точку  $A$  можна провести тільки одну пряму  $b \parallel a$ .



Мал. 98



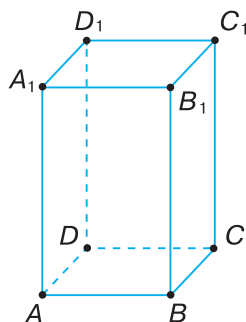
Мал. 99

З означення паралельних прямих та доведеної теореми випливає, що **через дві паралельні прямі можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

**Пам'ятайте, що у просторі справджуються всі властивості двох паралельних прямих, які ви вивчали в планіметрії.**

На малюнку 100 ви бачите прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Його бічні грані – прямокутники. У кожного з них протилежні сторони попарно паралельні. Тому прямі, що містять протилежні ребра кожної бічної грані паралелепіпеда, попарно паралельні. Наприклад, прямі  $AA_1$  і  $BB_1$ ,  $AB$  і  $A_1 B_1$  – паралельні.

**?** Ви дізналися, що  $AA_1 \parallel BB_1$  і  $BB_1 \parallel CC_1$  (мал. 100). Чи правильно, що  $AA_1 \parallel CC_1$ ? Так, але у просторі цей факт потребує доведення, бо прямі  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$  не лежать в одній площині.



Мал. 100



### Теорема (ознака паралельності прямих).

Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

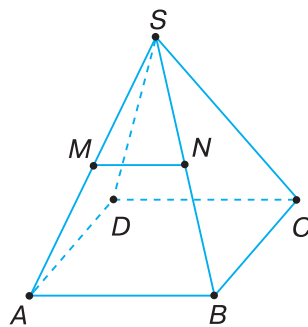
Існує кілька способів доведення ознаки паралельності прямих. Спосіб, який можна застосувати зараз, є досить складним. Його ми наводимо в рубриці «Дізнайтеся більше». У § 6 ви ознайомитеся з більш простим доведенням цієї ознаки.

Ознака паралельності прямих дає змогу довести, що всі бічні ребра паралелепіпеда на малюнку 100 лежать на паралельних прямих. Доведіть це самостійно.



**Задача.**  $MN$  – середня лінія бічної грані  $SAB$  правильної чотирикутної піраміди  $SABCD$  (мал. 101). Доведіть, що  $MN \parallel CD$ .

**Розв'язання.** Бічними гранями піраміди є трикутники.  $MN$  – середня лінія в  $\triangle SAB$ , тому  $MN \parallel AB$ .  $AB \parallel CD$ , оскільки основа даної піраміди – квадрат  $ABCD$ . Отже, за ознакою паралельності прямих,  $MN \parallel CD$ .



Мал. 101

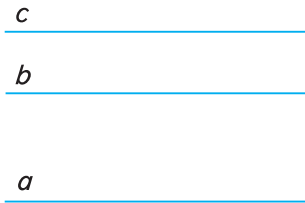
**Щоб встановити паралельність двох прямих, покажіть, що:**  
 або існує пряма, якій паралельна кожна з даних прямих,  
 або відрізки даних прямих є протилежними сторонами паралелограма (чи основами трапеції, чи основою і середньою лінією трикутника тощо).

### ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

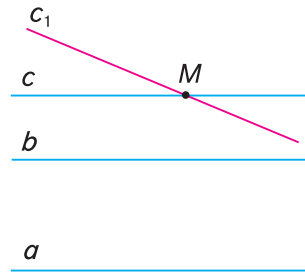
Доведемо ознаку паралельності прямих.

Розглянемо два випадки: 1) дані прямі лежать в одній площині; 2) дані прямі не лежать в одній площині.

1) Нехай прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  лежать в одній площині,  $a \parallel b$  і  $a \parallel c$  (мал. 102). Доведемо, що  $b \parallel c$ . Позначимо довільну точку  $M$  на прямій  $c$ . Припустимо, що пряма  $c$  не паралельна прямій  $b$ . Тоді, за аксіомою паралельних прямих, через точку  $M$  можна провести пряму  $c_1$ , паралельну прямій  $b$  (мал. 103). Дістали, що через точку  $M$  проходять дві прямі —  $c$  і  $c_1$ , паралельні прямій  $a$ , що неможливо. Отже, наше припущення було неправильним, а правильним є те, що  $b \parallel c$ .

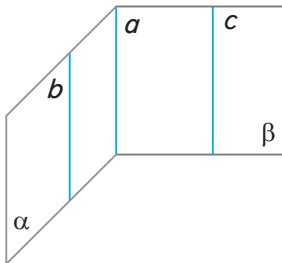


Мал. 102

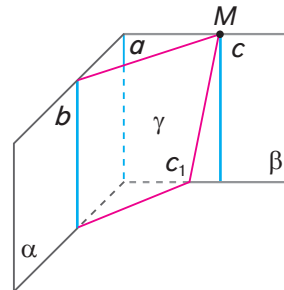


Мал. 103

2) Нехай прямі  $a$ ,  $b$  і  $c$  не лежать в одній площині,  $a \parallel b$  і  $a \parallel c$ . Доведемо, що  $b \parallel c$ . Проведемо через паралельні прямі  $a$  і  $b$  площину  $\alpha$ , а через паралельні прямі  $a$  і  $c$  — площину  $\beta$  (мал. 104). Через довільну точку  $M$  прямої  $c$  і пряму  $b$  проведемо площину  $\gamma$ . За аксіомою 4 стереометрії, площина  $\gamma$  перетинає площину  $\beta$  по прямій. Припустимо, що це деяка пряма  $c_1$ , відмінна від прямої  $c$  (мал. 105). Припустимо далі, що пряма  $c_1$  перетинає площину  $\alpha$ . Тоді точка їх перетину має належати і прямій  $a$ , бо прямі  $a$  і  $c_1$  лежать у площині  $\beta$ , і прямій  $b$ , бо прямі  $b$  і  $c_1$  лежать у площині  $\gamma$ . Але, за умовою,  $a \parallel b$ . Дістали суперечність. Отже, пряма  $c_1$  не перетинає площину  $\alpha$ , а значить, не може перетинати і пряму  $a$ , тобто  $c_1 \parallel a$ . Але тоді у площині  $\beta$  через точку  $M$  проходять дві прямі, паралельні прямій  $a$ :  $c \parallel a$  за умовою і  $c_1 \parallel a$  за доведеним. Дістали суперечність з аксіомою паралель-



Мал. 104



Мал. 105

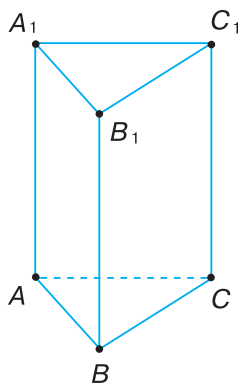
них прямих. Отже, пряма  $c_1$  збігається з прямою  $c$ . Звідси випливає, що пряма  $c$  лежить у площині  $\gamma$  і не перетинає площину  $\alpha$ . Дістали, що прямі  $b$  і  $c$  лежать в одній площині  $\gamma$  і не перетинаються. Отже,  $b \parallel c$ .

### ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

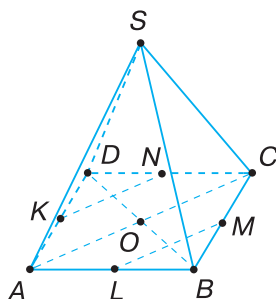
1. Як формулюється аксіома паралельних прямих?
2. Сформулюйте і доведіть основну властивість паралельних прямих у просторі.
3. Які властивості паралельних прямих?
4. Як формулюється ознака паралельності прямих?
5. Поясніть, як можна встановити паралельність двох прямих.

### РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

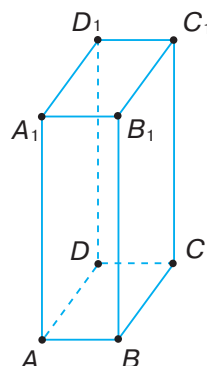
- 145'.** Проведіть пряму  $a$  і позначте точку  $A$ , що не лежить на ній.  
Проведіть пряму  $AB$  паралельно прямій  $a$ .  
Скільки таких прямих можна провести: 1) на площині; 2) у просторі?
- 146'.** За допомогою навколишніх предметів проілюструйте основну властивість паралельних прямих: 1) на площині; 2) у просторі.
- 147'.** На малюнках 106 – 108 назвіть:  
1) пари паралельних прямих;  
2) площину, що проходить через певну пару паралельних прямих.
- 148'.** Скільки площин можна провести через дві паралельні прямі?  
Наведіть приклад з доквілля.
- 149'.** За малюнком 108 назвіть ребро паралелепіпеда, яке паралельне даному ребру і не лежить з ним в одній грані:  
1)  $AA_1$ ; 2)  $BB_1$ ; 3)  $AB$ ; 4)  $BC$ .
- 150'.** Наведіть приклади з доквілля, що ілюструють ознаку паралельності прямих.



Мал. 106



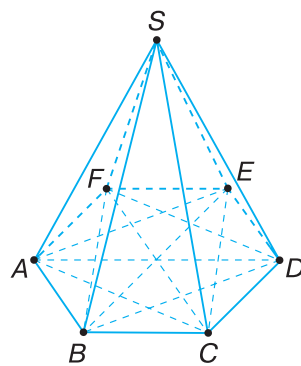
Мал. 107



Мал. 108

- 151°.** Скільки ребер куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  проходить через дану його вершину паралельно заданому ребру:
- 1)  $A$  і  $B_1 C_1$ ;
  - 2)  $D$  і  $BB_1$ ;
  - 3)  $C_1$  і  $AA_1$ ?
- Відповідь обґрунтуйте.
- 152°.** Накресліть прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Проведіть діагональ його грані, що проходить через дану вершину паралельно вказаній прямій:
- 1)  $A$  і  $B_1 D_1$ ; 2)  $D_1$  і  $BC_1$ ; 3)  $B$  і  $A_1 C_1$ .
- 153°.** Відрізок  $AB$  має з площиною  $\alpha$  спільну точку  $A$ . Через точку  $B$  і середину  $C$  відрізка  $AB$  проведено паралельні прямі, що перетинають площину  $\alpha$  відповідно в точках  $B_1$  і  $C_1$ .  
Чи лежать в одній площині прямі  $BB_1$  і  $CC_1$ ?  
Знайдіть довжину відрізка  $CC_1$ , якщо:
- 1)  $BB_1 = 12$  см; 2)  $BB_1 = 9$  см; 3)  $BB_1 = 32$  см.
- 154°.** Відрізок  $AB$  не перетинає площину  $\alpha$ . Через кінці відрізка  $AB$  і його середину  $C$  проведено паралельні прямі, що перетинають площину  $\alpha$  відповідно в точках  $A_1$ ,  $B_1$  і  $C_1$ . Чи лежать в одній площині прямі  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$ ?  
Знайдіть довжину відрізка  $CC_1$ , якщо:
- 1)  $AA_1 = 10$  см,  $BB_1 = 12$  см;
  - 2)  $AA_1 = 15$  см,  $BB_1 = 9$  см;
  - 3)  $AA_1 = 18$  см,  $BB_1 = 32$  см.
- 155°.** Сформулюйте властивості паралельних прямих, які ви вивчали у планіметрії.
- 156°.** З планіметрії відомо, що пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає й другу. Чи є правильним це твердження у стереометрії?
- 157°.** У кубі проведіть січну площину, яка:
- 1) проходить через ребро нижньої основи і перетинає верхню основу паралельно даному ребру;
  - 2) проходить через ребро верхньої основи і перетинає нижню основу паралельно даному ребру;
  - 3) проходить через бічне ребро і перетинає бічну грань паралельно даному ребру.
- Яку фігуру дістали в перерізі? Відповідь поясніть.
- 158°.** Перерізом прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є прямокутник зі сторонами:
- 1)  $AB$  і  $AD_1$ ;
  - 2)  $B_1 C_1$  і  $C_1 D_1$ ;
  - 3)  $BD$  і  $BB_1$ .
- Яким прямим паралельні сторони перерізу?

- 159°.** Дано правильну шестикутну піраміду  $SABCDEF$  (мал. 109). Яким сторонам або діагоналям основи паралельна пряма, що проходить через середину ребра  $SA$  і середину ребра:
- 1)  $SB$ ; 2)  $SC$ ; 3)  $SD$ ?
- Відповідь поясніть.



Мал. 109

- 160°.** Дві паралельні прямі  $a$  і  $b$  відповідно паралельні прямим  $c$  і  $d$ .  
Яке взаємне розміщення прямих:
- 1)  $a$  і  $c$ ; 2)  $a$  і  $d$ ;
  - 3)  $b$  і  $c$ ; 4)  $b$  і  $d$ ?

- 161.** Усі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.  
**Доведіть.**

- 162.** Прямі  $a$  і  $b$  перетинаються. Доведіть, що усі прямі, які паралельні прямій  $a$  і перетинають пряму  $b$ , лежать в одній площині.

- 163.** Прямі  $a$  і  $b$  не лежать в одній площині.

Чи можна провести пряму  $c$ , яка:

- 1) паралельна прямим  $a$  і  $b$ ;
- 2) проходить через дану точку і перетинає прямі  $a$  і  $b$ ?

- 164.** Чи існують дві паралельні прямі, кожна з яких перетинає дані мимобіжні прямі?

- 165.** Доведіть, що перерізом прямої призми площиною, яка проходить через середини її бічних ребер, є багатокутник, що дорівнює багатокутнику основи.

- 166.** Січна площина проходить через середини бічних ребер правильної  $n$ -кутної піраміди зі стороною основи  $a$ . Який багатокутник дістали в перерізі?

Знайдіть його периметр і площу, якщо:

- 1)  $n = 3$ ,  $a = 4$  см; 2)  $n = 4$ ,  $a = 6$  см.

- 167.** Доведіть, що перерізом довільної піраміди площиною, яка проходить через середини її бічних ребер, є багатокутник, подібний до багатокутника основи з коефіцієнтом подібності  $\frac{1}{2}$ .

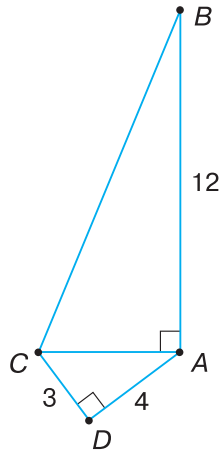
- 168.** Точка  $M$  лежить поза площиною трикутника  $ABC$ . Точки  $K$ ,  $P$ ,  $E$  і  $F$  — середини відрізків  $MA$ ,  $AB$ ,  $MC$ ,  $BC$ .

Як розміщені прямі: 1)  $KP$  і  $EF$ ; 2)  $KE$  і  $PF$ ?

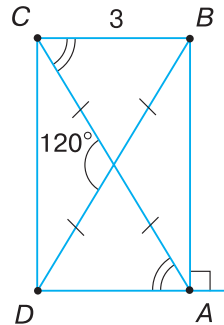
Відповідь обґрунтуйте.

- 169.** Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  не лежать в одній площині.

Доведіть, що середини сторін чотирикутника  $ABCD$  лежать в одній площині. Вершинами якого чотирикутника є ці точки?



Мал. 110



Мал. 111

- 170\*** Доведіть, що середини всіх відрізків, кінці яких лежать на даних паралельних прямих, належать не одній площині.
- 171\*** Доведіть, що середини всіх відрізків, кінці яких лежать на даних мимобіжних прямих, належать не одній площині.
- 172\*** Доведіть, що діагоналі протилежних граней прямокутного паралелепіпеда, які проведено з кінців одного ребра, паралельні.
- 173\*** Існує площина, яка перетинає бічні ребра чотирикутної піраміди так, що в перерізі утворюється паралелограм. Доведіть.
- 174\*** В основі піраміди лежить многокутник, зображений на малюнках 110, 111. Січна площина ділить кожне бічне ребро піраміди у відношенні 2 : 1, рахуючи від її вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.
- 175\*** На сторонах просторового чотирикутника  $ABCD$  взято точки  $A_1, B_1, C_1$  і  $D_1$  так, що  $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{AD_1}{D_1D} = \frac{CC_1}{C_1D} = \frac{CB_1}{B_1B}$ . Доведіть, що чотирикутник  $A_1B_1C_1D_1$  — паралелограм.
- 176\*** Доведіть, що куб можна перетнути січною площиною так, щоб у перерізі утворився правильний шестикутник.

### ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 177.** Щоб провести пряму лінію на землі, використовують два кілочки і мотузку. Поясніть, як це роблять. На якій властивості паралельних прямих ґрунтується така побудова?
- 178.** Майстриня прикрашає сорочку вишиваними смужками, розміщуючи їх на лівій і правій боках сорочки паралельно лінії гудзиків. Чому в готовому виробі смужки виглядають паралельними?



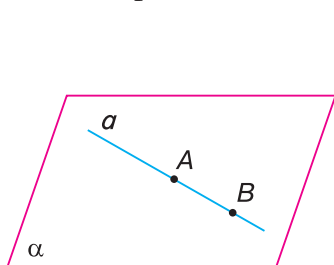


- 179.** На певній ділянці автостради її смуги розділені суцільною лінією (її не можна перетинати). Чи можуть на цій ділянці зіткнутися автомобілі законослухняних водіїв, що рухаються назустріч один одному? Відповідь пояснить.
- 180.** Щоб естетично розмістити на стіні картину прямокутної форми, один з її горизонтальних країв вирівнюють відносно стику цієї стіни і стелі. На чому ґрунтується такий спосіб?

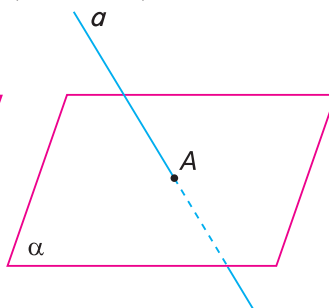
## §5. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ



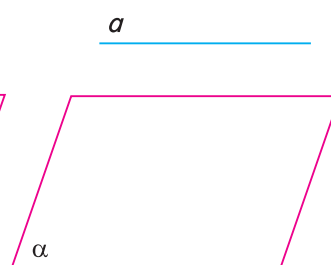
Можливі три випадки взаємного розміщення прямої і площини: 1) пряма і площина мають безліч спільних точок, тобто пряма *лежить у* площині (мал. 112); 2) пряма і площина мають одну спільну точку, тобто *перетинаються* (мал. 113); 3) пряма і площина не мають спільних точок, тобто *не перетинаються* (мал. 114).



Мал. 112



Мал. 113



Мал. 114



Пряма і площина, які не перетинаються, називаються **паралельними**.

Для трьох випадків взаємного розміщення прямої і площини вживатимемо відповідні позначення:  $a \in \alpha$ ,  $a \times \alpha$ ,  $a \parallel \alpha$ .



Як встановити, що пряма паралельна площині? Відповідь дає наступна теорема.



**Теорема (ознака паралельності прямої і площини).**

Якщо пряма, що не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

**Дано:** площина  $\alpha$ , пряма  $a$  не лежить в  $\alpha$ , пряма  $b$  лежить в  $\alpha$ ,  
 $a \parallel b$  (мал. 115).

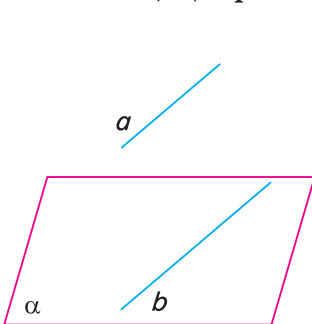
**Довести:**  $a \parallel \alpha$ .

**Доведення.** Проведемо площину  $\beta$  через паралельні прямі  $a$  і  $b$  (мал. 116). Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $b$ . Припустимо, що пряма  $a$  не паралельна площині  $\alpha$ , а перетинає цю площину в деякій точці  $M$  (мал. 117). Ця точка лежить у даній площині  $\alpha$  і площині  $\beta$ , тому вона лежить на прямій  $b$  перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$ . Отже, прямі  $a$  і  $b$  перетинаються. А це неможливо, бо  $a \parallel b$  за умовою. Отже, наше припущення неправильне, а правильним є те, що пряма  $a$  не перетинає площину  $\alpha$ , тобто  $a \parallel \alpha$ .

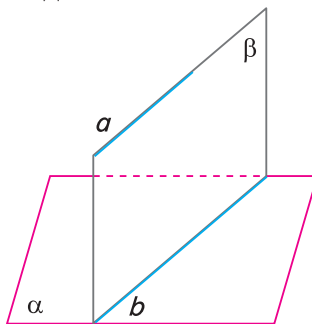


Спосіб доведення від супротивного полягає в тому, що:

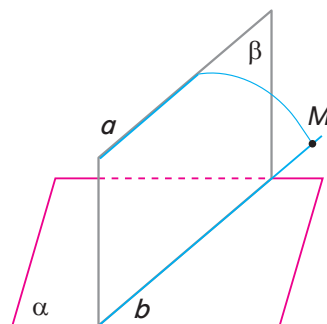
- 1) робимо припущення, протилежне тому, що треба довести;
- 2) міркуваннями доходимо до висновку, що суперечить або умові твердження, що доводиться, або одній з аксіом, або доведеній раніше теоремі, або припущенню;
- 3) робимо висновок – наше припущення неправильне, а тому правильним є те, що треба було довести.



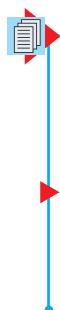
Мал. 115



Мал. 116

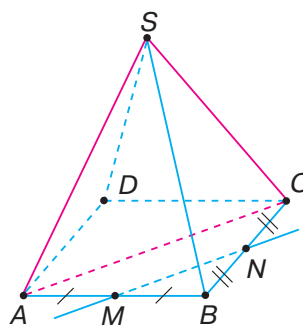


Мал. 117



**Задача.** У піраміді  $SABCD$  через ребра  $SA$  і  $SC$  проведено площину (мал. 118). Чи паралельна вона прямій  $MN$ , що проходить через середини ребер  $AB$  і  $BC$ ?

**Розв'язання.** Відрізок  $MN$  – середня лінія трикутника  $ABC$ . Оскільки  $MN \parallel AC$ , а  $AC$  лежить у площині  $SAC$ , то пряма  $MN$  паралельна площині  $SAC$ .



Мал. 118



Щоб встановити паралельність прямої і площини, покажіть, що:

або в площині існує пряма, якій паралельна дана пряма,  
або відрізки даної прямої і прямої, що лежить у даній площині, є протилежними сторонами паралелограма (чи основами трапеції, чи основою і середньою лінією трикутника тощо), який не лежить у даній площині.  
Взаємне розміщення прямої і площини подано в таблиці 5.

Таблиця 5

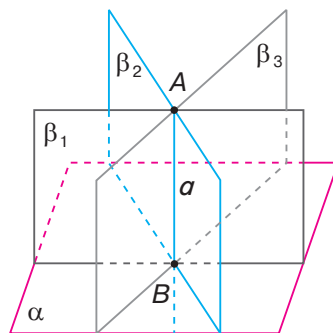
Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Пряма $a$ і площина $\alpha$	мають безліч спільних точок	пряма лежить у площині	$a$ лежить в $\alpha$
	мають одну спільну точку	пряма перетинає площину	$a \times \alpha$
	не мають спільних точок	пряма паралельна площині	$a \parallel \alpha$



**ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ**

1. У вас могло виникнути запитання: Чи є правильним твердження «Через точку, що не лежить у площині, можна провести єдину пряму, паралельну даній площині»? Поміркуємо.

Через точку  $A$ , що не лежить у площині  $\alpha$ , проведемо пряму  $a$ , що перетинає дану площину в деякій точці  $B$  (мал. 119). За наслідком 3 з аксіом стереометрії, через пряму  $a$  в просторі можна провести безліч площин. Позначимо їх  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$



Мал. 119

За аксіомою 4 стереометрії, кожна із цих площин перетинатиме площину  $\alpha$  по деякій прямій, нехай  $b_1, b_2, b_3, \dots$

За аксіомою паралельних прямих, у площині  $\beta_1$  через точку  $A$  можна провести єдину пряму, нехай  $c_1$ , паралельну прямій  $b_1$ .

Аналогічно і в інших площинах можна провести  $c_2 \parallel b_2, c_3 \parallel b_3, \dots$

Отже, **у просторі через точку  $A$  можна провести безліч прямих, паралельних площині  $\alpha$ .**

**2.** До особливого класу теорем належать так звані *теореми існування і єдиності*.

Наприклад, основна властивість паралельних прямих у просторі:

через точку, яка не лежить на прямій, у просторі

можна провести пряму, паралельну даній прямій,  $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{існування}}$  і  $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{єдиність}}$ .

У «Началах» Евкліда (III ст. до н. е.) теореми існування і єдиності відіграють ключову роль. Стародавні грецькі математики не допускали існування фігури незалежно від побудови. За Евклідом, геометрична фігура існує лише з моменту її побудови. Тому доведення існування часто містять правила побудови відповідних фігур чи їх комбінацій. Для доведення єдиності застосовується метод від супротивного.

**3.** Метод доведення від супротивного ґрунтується на *законі виключеного третього*: з двох тверджень « $T$ » і «не  $T$ » одне є істинним, а друге — хибним, третього не дано.

Цей закон сформулював давньогрецький вчений Арістотель (384 — 322 до н. е.) у своїй праці «Метафізика».

### ✓ ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої і площини. Як їх позначають?
2. Дайте означення паралельних прямої і площини.
3. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
4. Поясніть, у чому полягає спосіб доведення від супротивного.
5. Як можна встановити паралельність прямої і площини?

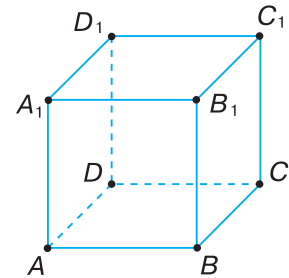
### 🕒 РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

**181'.** Наведіть приклади взаємного розміщення прямої і площини на предметах класної кімнати.

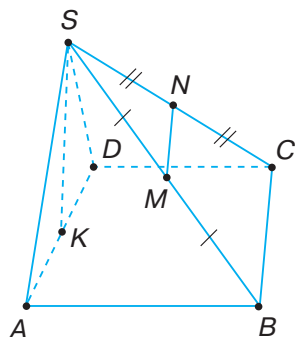
**182'.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб (мал. 120).

Яке взаємне розміщення:

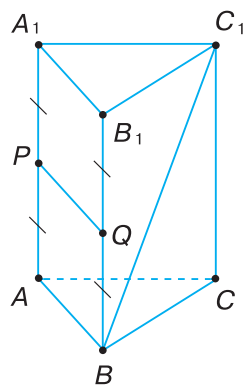
- 1) прямої  $A_1 C_1$  і площини  $ABC$ ;
- 2) прямої  $BC_1$  і площини  $D_1 A_1 B_1$ ;
- 3) прямої  $AD_1$  і площини  $BCC_1$ ?



Мал. 120



Мал. 121



Мал. 122

183'. На малюнках 121, 122 назвіть:

- 1) прямі, що лежать у площині  $ABC$ ;
- 2) прямі, що перетинають площину  $ABC$ ;
- 3) прямі, паралельні площині  $ABC$ .

Зробіть відповідні записи.

184°. Чому пряма не може перетинати площину більше ніж в одній точці?  
Відповідь обґрунтуйте.

185°. Пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ . Чи існують у даній площині прямі, не паралельні прямій  $a$ ? Проведіть одну з них.

186°. Чи правильно, що пряма, паралельна площині, є паралельною будь-якій прямій, що лежить у даній площині?

187°. Чи може пряма  $a$  перетинати площину  $\alpha$ , коли паралельні їй прямі лежать у цій площині?

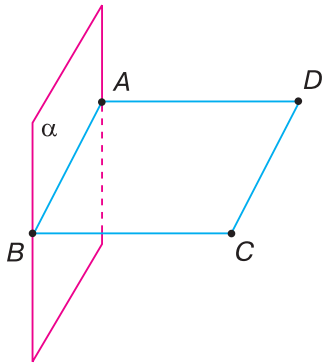
188°. Чи правильно, що коли одна з двох паралельних прямих паралельна деякій площині, то і друга пряма паралельна цій площині?

189°. У прямокутному паралелепіпеді  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  проведіть пряму  $KP$ , яка:

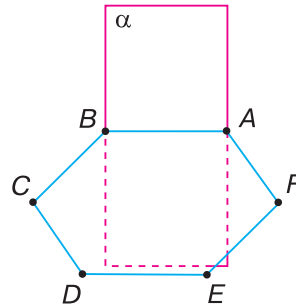
- 1) лежить у площині грані  $BCC_1 B_1$ , проходить через середину ребра  $BB_1$  і паралельна площині  $A_1 B_1 C_1$ ;
- 2) лежить у площині грані  $ABCD$ , проходить через середину ребра  $CD$  і паралельна площині  $AA_1 D_1$ ;
- 3) лежить у площині грані  $ABB_1 A_1$ , проходить через середину ребра  $A_1 B_1$  і паралельна площині  $AA_1 D_1$ .

190°. Основою піраміди  $SABCD$  є прямокутник. У площині її грані через середину бічного ребра проведено пряму  $EF$  паралельно площині основи. Якою може бути довжина відрізка  $EF$ , якщо сторони основи піраміди дорівнюють:

- 1) 4 см і 6 см;
- 2) 3 см і 7 см;
- 3) 2 см і 5 см?



Мал. 123



Мал. 124

- 191°.**  $ABCD$  – паралелограм. Площина  $\alpha$  перетинає площину паралелограма по прямій:  
 1)  $AB$  (мал. 123); 2)  $BC$ ; 3)  $CD$ .  
 Яке розміщення інших сторін паралелограма відносно площини  $\alpha$ ?
- 192°.**  $ABCDEF$  – правильний шестикутник. Площина  $\alpha$  перетинає площину шестикутника по прямій:  
 1)  $AB$  (мал. 124); 2)  $CD$ ; 3)  $EF$ .  
 Яке розміщення інших сторін і діагоналей шестикутника відносно площини  $\alpha$ ?
- 193°.** Трикутник  $ABC$  не лежить в одній площині з другим трикутником, але має з ним спільну сторону:  
 1)  $AB$ ; 2)  $BC$ ; 3)  $AC$ .  
 Доведіть, що одна із середніх ліній  $\Delta ABC$  паралельна площині другого трикутника.
- 194°.** Площина  $\alpha$  паралельна стороні  $AB$  трикутника  $ABC$  і перетинає сторони  $AC$  і  $BC$  в точках  $K$  і  $M$ , причому  $BN = NC$ .  
 Доведіть, що  $KN \parallel AB$  і знайдіть довжину сторони  $AB$ , якщо:  
 1)  $KN = 9$  см,  $AC = 24$  см,  $KC = 12$  см;  
 2)  $KN = 8$  см,  $AC = 18$  см,  $KC = 9$  см;  
 3)  $KN = 11$  см,  $AC = 16$  см,  $KC = 8$  см.
- 195.** Дві прямі паралельні одній площині. Чи паралельні вони між собою?
- 196.** Паралельні прямі  $a$  і  $b$  не лежать у площині  $\alpha$ . Якщо  $a \parallel \alpha$ , то і  $b \parallel \alpha$ . Доведіть.
- 197.** Пряма  $a$  паралельна площині  $\alpha$ . Чи правильно, що будь-яка пряма, що проходить через деяку точку площини  $\alpha$  паралельно прямій  $a$ , лежить у площині  $\alpha$ ?
- 198.** Площина  $\alpha$  перетинає дві сторони трикутника і ділить їх у відношенні  $m : n$ . Яке розміщення даної площини відносно третьої сторони трикутника, якщо:  
 1)  $m = 1, n = 2$ ; 2)  $m = 2, n = 3$ ?  
 Скільки випадків треба розглянути?

- 199.** Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.
- 200.** Прямі  $a$  і  $b$  перетинаються. Точка  $A$  не лежить на даних прямих. Чи можна через точку  $A$  провести площину, паралельну кожній з даних прямих?
- 201.** У кубі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  проведено площину через ребра  $AA_1$  і  $CC_1$ . Чи паралельна вона прямій, що проходить через середини ребер:  
1)  $AB$  і  $BC$ ; 2)  $A_1 D_1$  і  $CD$ ?  
Відповідь обґрунтуйте.
- 202.** В основі піраміди з вершиною  $S$  лежить правильний шестикутник  $ABCDEF$ . Чи можна в грані  $SAB$  провести відрізок, паралельний площині:  
1)  $ABC$ ; 2)  $SCD$ ;  
3)  $SCE$ ; 4)  $SAF$ ?
- 203.** Точки  $A$  і  $B$  лежать у сусідніх бічних гранях призми. Як у площинах цих граней провести паралельні прямі, що проходять відповідно через точку  $A$  і точку  $B$ ?
- 204.** Чи може площина, яка проходить через середини двох сторін трикутника, перетинати третю його сторону?
- 205.** Дано: 1) квадрат; 2) правильний шестикутник.  
Площину  $\alpha$  проведено паралельно одній із сторін даного многокутника. Дослідіть, як може розміщуватися площина  $\alpha$  відносно інших сторін даного многокутника.
- 206\*.** Доведіть, що існує безліч площин, які перетинають дану пряму.
- 207\*.** Чи можна побудувати площину, яка проходить через дану пряму паралельно:  
1) другій даній прямій;  
2) двом іншим даним прямим?
- 208\*.** Дано довільну піраміду. Доведіть, що прямі, які проходять через середини двох бічних ребер піраміди, паралельні її основі.
- 209\*.**  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — пряма призма, в основі якої лежить правильний шестикутник.  
Чи паралельна площина  $ACC_1$  прямій, що проходить через:  
1) вершину  $F$  і середину ребра  $DD_1$ ;  
2) вершину  $D$  і середину ребра  $E_1 F_1$ ?
- 210\*.** Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму  $AB$  і паралельні прямій  $CD$ , що є мимобіжною з  $AB$ , лежать в одній площині.
- 211\*.** Доведіть, що всі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і цією точкою діляться навпіл.
- 212\*.** Вершини чотирикутника не лежать в одній площині.  
Доведіть, що площина, яка паралельна двом мимобіжним сторонам даного чотирикутника, ділить дві інші його сторони на пропорційні відрізки.


**213\*.** Побудуйте лінію перетину площин двох трикутників, у яких одна вершина спільна, а протилежні їй сторони паралельні.

### ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

**214.** Яке взаємне розміщення моста через річку (пряма  $a$ ), напрямку її течії (пряма  $b$ ) і площини водної поверхні (площина  $\alpha$ )?

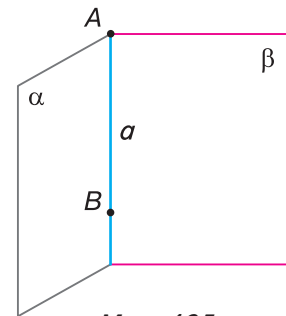
**215.** Розмічаючи верхній край панелі на стіні, його вирівнюють відносно плінтуса. Чи паралельні край панелі й площина підлоги? Відповідь поясніть.

## §6. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН

 Ви вже знаєте, що дві площини можуть або перетинатися, або не перетинатися.

### 1. ПЛОЩИНИ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

За аксіомою 4 стереометрії, якщо дві площини мають спільну точку, то вони *перетинаються* по прямій, яка проходить через цю точку (мал. 125). Кожна точка цієї прямої належить обом площинам.



Мал. 125

 Площини  $\alpha$  і  $\beta$ , що перетинаються, позначаємо:  $\alpha \times \beta$ .



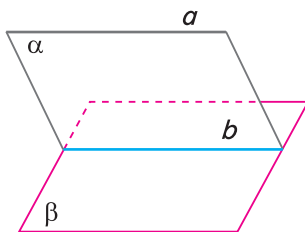
#### Теорема (властивість площин, що перетинаються).

Якщо одна з двох площин, що перетинаються, проходить через пряму, паралельну другій площині, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.

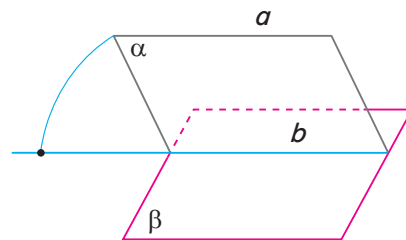
**Дано:**  $\alpha \times \beta$ ,  $a$  лежить в  $\alpha$  і  $a \parallel \beta$ ,  $b$  лежить в  $\alpha$  і  $\beta$  (мал. 126).

**Довести:**  $b \parallel a$ .

**Доведення.** За умовою, пряма  $b$  лежить в одній площині  $\alpha$  з прямою  $a$ . Пряма  $b$  не може перетинатися з прямою  $a$ , бо інакше пряма  $a$  перетиналася б із площиною  $\beta$  (мал. 127), а це неможливо.

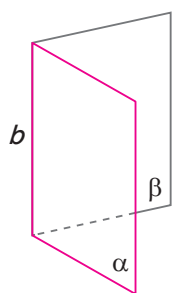


Мал. 126

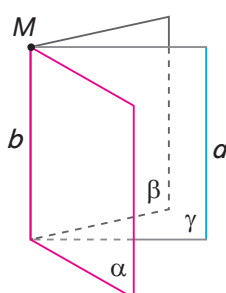


Мал. 127

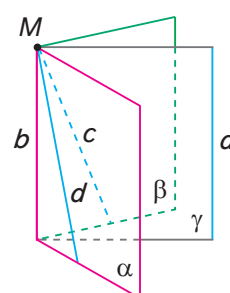




Мал. 128



Мал. 129



Мал. 130

**Наслідок** (властивість площин, що перетинаються). Якщо пряма паралельна кожній з двох площин, що перетинаються, то вона паралельна прямій їх перетину.

Нехай площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $b$  і пряма  $a$  паралельна обом даним площинам:  $a \parallel \alpha$ ,  $a \parallel \beta$  (мал. 128). Доведемо, що  $a \parallel b$ .

Проведемо площину  $\gamma$  через пряму  $a$  і довільну точку  $M$  прямої  $b$  (мал. 129). Припустимо, що площина  $\gamma$  перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  відповідно по прямих  $c$  і  $d$ , які не збігаються з прямою  $b$  (мал. 130).

За властивістю площин, що перетинаються,  $a \parallel c$  і  $a \parallel d$ . Дістали, що через точку  $M$  проходять дві прямі –  $c$  і  $d$ , паралельні прямій  $a$ , що неможливо. Отже, прямі  $c$ ,  $d$  і  $b$  збігаються, а значить,  $a \parallel b$ .



Наведені властивості площин, що перетинаються, можна вважати ознаками паралельності двох прямих у просторі.



**Задача.** Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою. Доведіть, спираючись на властивості площин, які перетинаються.

**Розв'язання.** Нехай  $a \parallel c$  і  $b \parallel c$  (мал. 131). Доведемо, що  $a \parallel b$ .

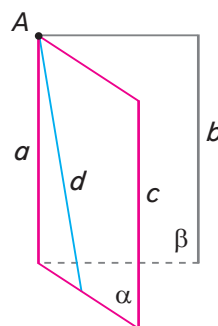
Через прямі  $a$  і  $c$  проведемо площину  $\alpha$ .

Оскільки  $b \parallel c$ , то  $b \parallel \alpha$  (за ознакою паралельності прямої і площини).

Через пряму  $b$  і довільну точку  $A$  прямої  $a$  проведемо площину  $\beta$ .

Оскільки  $c \parallel b$ , то  $c \parallel \beta$  (за ознакою паралельності прямої і площини). Отже, за властивістю площин, що перетинаються, площини  $\alpha$  і  $\beta$  мають перетинатися по прямій, яка паралельна прямій  $c$  і проходить через точку  $A$ . Позначимо її  $d$ . Дістали, що в площині  $\alpha$  через точку  $A$  проходять дві прямі –  $a$  і  $d$ , паралельні прямій  $c$ , що неможливо.

Отже, прямі  $a$  і  $d$  збігаються, а значить,  $a \parallel b$ .



Мал. 131

## 2. ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ



Дві площини, які не перетинаються, називаються **паралельними**.



Паралельність площини  $\alpha$  і  $\beta$  позначаємо:  $\alpha \parallel \beta$ .



Як встановити, що дві площини паралельні?

Відповідь дає така теорема.



**Теорема (ознака паралельності площин).**

Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

**Дано:** площини  $\alpha$  і  $\beta$ , прямі  $a$  і  $b$  площини  $\alpha$ ,  $a \times b$ ,  
прямі  $a_1$  і  $b_1$  площини  $\beta$ ,  $a \parallel a_1$ ,  $b \parallel b_1$  (мал. 132).

**Довести:**  $\alpha \parallel \beta$ .

**Доведення.** Оскільки прямі  $a$  і  $b$  паралельні прямим  $a_1$  і  $b_1$ , то  $a \parallel \beta$  і  $b \parallel \beta$  (за ознакою паралельності прямої і площини).

Припустимо, що площини  $\alpha$  і  $\beta$  не паралельні, а перетинаються по деякій прямій  $MN$  (мал. 133).

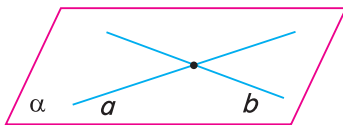
Площина  $\alpha$  проходить через пряму  $a$ , паралельну площині  $\beta$ , і перетинає цю площину по прямій  $MN$ . Тоді, за властивістю площин, що перетинаються,  $MN \parallel a$ .

Так само, площина  $\alpha$  проходить через пряму  $b$ , паралельну площині  $\beta$ , і перетинає цю площину по прямій  $MN$ .

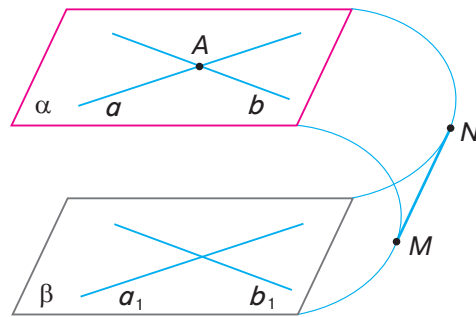
Тоді  $MN \parallel b$ .

Дістали, що у площині  $\alpha$  через точку  $A$  проходить дві прямі  $a$  і  $b$ , паралельні прямій  $MN$ . А це суперечить основній властивості паралельних прямих.

Отже, площини  $\alpha$  і  $\beta$  не перетинаються, тобто  $\alpha \parallel \beta$ .



Мал. 132

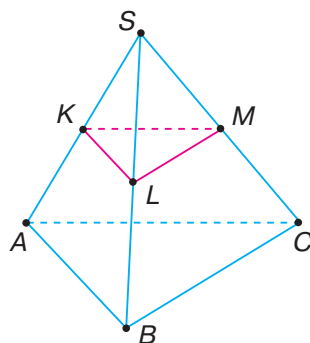


Мал. 133



**Задача.** Через середини бічних ребер піраміди  $SABC$  проведено площину  $KLM$  (мал. 134). Доведіть, що ця площина паралельна площині основи піраміди.

**Розв'язання.** Відрізки  $KL$  і  $LM$  — середні лінії трикутників  $SAB$  і  $SBC$ . Звідси  $KL \parallel AB$  і  $LM \parallel BC$ . За ознакою паралельності площин, площина  $KLM$  паралельна площині  $ABC$ .



Мал. 134

Прийmemo без доведення наступну теорему.



**Теорема (основна властивість паралельних площин).**

Через точку, яка не лежить у площині, можна провести площину, паралельну даній площині, і тільки одну.

Взаємне розміщення двох площин наведено в таблиці 6.

Таблиця 6

Фігури	Взаємне розміщення		Запис
Дві площини $\alpha$ і $\beta$	мають спільну точку	перетинаються	$\alpha \times \beta$
	не мають спільних точок	паралельні	$\alpha \parallel \beta$



**ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ**

1. У вас може виникнути запитання: *Як довести основну властивість паралельних площин?*

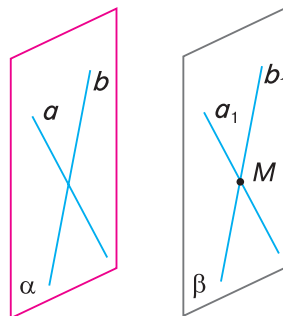
Нехай  $\alpha$  — дана площина, а  $M$  — точка, що не лежить у ній.

Треба довести, що:

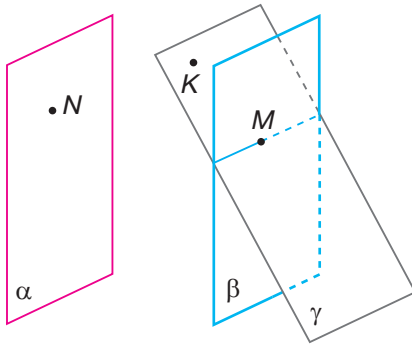
1) через точку  $M$  можна провести площину  $\beta$ , паралельну площині  $\alpha$ ;

2) площина  $\beta$  — єдина.

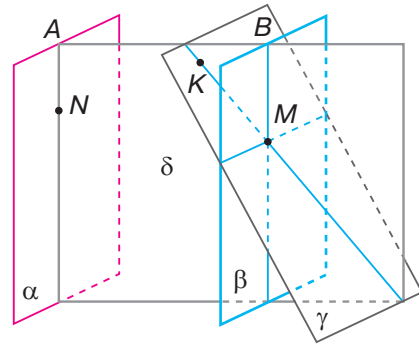
1) Проведемо у площині  $\alpha$  дві прями  $a$  і  $b$ , що перетинаються. За основною властивістю паралельних прямих, через точку  $M$  можна провести прями  $a_1$  і  $b_1$ , паралельні прямим  $a$  і  $b$ . За наслідком 2 з аксіом стереометрії, через прями  $a_1$  і  $b_1$  можна провести площину  $\beta$  (мал. 135). За ознакою паралельності площин,  $\beta \parallel \alpha$ .



Мал. 135



Мал. 136



Мал. 137

2) Припустимо, що через точку  $M$  можна провести другу площину  $\gamma$ , паралельну площині  $\alpha$  (мал. 136). У площині  $\gamma$  візьмемо довільну точку  $K$ , що не лежить у площині  $\beta$ , а у площині  $\alpha$  — точку  $N$ . Через точки  $M$ ,  $K$  і  $N$  проведемо площину  $\delta$  (мал. 137). Вона перетне площину  $\alpha$  по прямій  $NA$ , площину  $\beta$  — по прямій  $MB$ , а площину  $\gamma$  — по прямій  $MK$ . Прямі  $MB$  і  $MK$  не можуть перетинати пряму  $NA$ , бо вони не перетинають площину  $\alpha$ , оскільки лежать у площинах  $\beta$  і  $\gamma$ , які, за припущенням, обидві паралельні площині  $\alpha$ . Дістали, що у площині  $\delta$  через точку  $M$  проходять дві прямі —  $MB$  і  $MK$ , паралельні прямій  $NA$ , а це неможливо. Отже, площина  $\beta$  — єдина.

**2.** Термін «класифікація» походить від латинських слів *classis* — розряд і *facio* — роблю. У загальному розумінні, *класифікація* — це розподіл деяких предметів на класи відповідно до найбільш суттєвої ознаки, що притаманна предметам даного роду і відрізняє ці предмети від предметів іншого роду. При цьому кожен клас предметів ділиться на підкласи. Суттєва ознака, що дає підстави здійснити класифікацію, називається *основою класифікації*. Вам добре відомі класифікації у різних галузях знань. Наприклад, у зоології — живих істот, що населяють нашу планету, в історії — суспільно-економічних формацій, у фізиці — елементарних частинок тощо.

Наукова класифікація відіграє важливу роль у теоретичній та практичній діяльності людини. Вона полегшує процес дослідження, надає можливість виявити й приховані закономірності. Показовим є приклад розробки класифікації хімічних елементів. Працюючи над книгою «Основи хімії», видатний російський вчений Д. І. Менделєєв (1834 — 1907) відкрив у 1869 році один з найфундаментальніших законів природи — періодичний закон хімічних елементів. Це дозволило вченому не лише систематизувати й уточнити дані про відомі на той час хімічні елементи, але й передбачити існування ще трьох елементів. У таблиці, що зараз носить ім'я Д. І. Менделєєва, вони містяться за номерами 21, 31 і 32. Галій (№ 31) відкрив у 1875 р. французький хімік П.-Е. Лекон де Буарбон, скандій (№ 21) — у 1879 р. шведський хімік Л. Нільсон, германій (№ 32) — у 1886 р. німецький хімік К. Вінклер.

### ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Яке взаємне розміщення двох площин?
2. Які властивості мають площини, що перетинаються?
3. Доведіть теорему про властивість площин, що перетинаються.
4. Дайте означення паралельним площинам. Як їх позначають?
5. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності площин.
6. Як формулюється основна властивість паралельних площин?

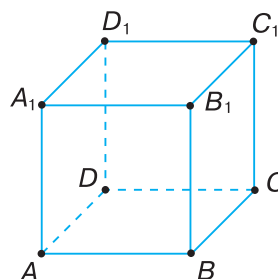
### РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

**216'** Наведіть приклади взаємного розміщення двох площин на предметах довкілля.

**217'**  $ABCD, A_1B_1C_1D_1$  — куб (мал. 138). По якій прямій перетинаються площини:

- 1)  $ABB_1$  і  $ABC$ ;
- 2)  $A_1D_1D$  і  $ABB_1$ ;
- 3)  $BCC_1$  і  $CDD_1$ ?

Яким прямим у даних площинах паралельна лінія їх перетину?



Мал. 138

**218'** Які площини паралельні на малюнку 138. Назвіть пару прямих, що перетинаються і лежать в одній з даних площин, та відповідну пару прямих у другій площині.

**219'** Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють ознаку паралельності площин.

**220'** Проведіть площини  $\alpha$  і  $\beta$ , що перетинаються. У площині  $\alpha$  проведіть пряму  $a$ . Яке взаємне розміщення прямої  $a$  і площини  $\beta$ ?

**221'** Чи можуть перетинатися дві площини, які паралельні тій самій прямій?

**222'**  $ABCD$  — паралелограм. Площина  $\alpha$  перетинає площину паралелограма по прямій: 1)  $AB$ ; 2)  $BC$ ; 3)  $CD$ .

Доведіть, що пряма перетину двох даних площин паралельна протилежній стороні паралелограма.

**223'** У кубі  $ABCD, A_1B_1C_1D_1$  проведіть площину, паралельну грані:

- 1)  $ABCD$ ;
- 2)  $AA_1B_1B$ ;
- 3)  $CDD_1C_1$ .

**224'** Дано прямокутний паралелепіпед  $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ .

Доведіть паралельність площин:

- 1)  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ ;
- 2)  $ABB_1$  і  $DCC_1$ ;
- 3)  $B_1C_1C$  і  $D_1DA$ .

- 225°.** Якщо пряма, що лежить в одній з даних площин, паралельна прямій, що лежить в другій площині, то дані площини паралельні.  
Чи є правильним таке твердження?
- 226°.** Якщо дві прямі, що лежать в одній площині, паралельні двом прямим, які лежать в другій площині, то дані площини паралельні.  
Чи є правильним таке твердження?
- 227°.** Чи можуть бути паралельними дві площини, які проходять через непаралельні прямі?
- 228°.** Прямі  $a$  і  $b$  — мимобіжні. Точка  $A$  лежить на прямій  $a$ , а точка  $B$  — на прямій  $b$ . На прямій  $AB$  взято точку  $C$ . Через цю точку проведено дві площини:  $\alpha$ , в якій лежить пряма  $a$ , і  $\beta$ , в якій лежить пряма  $b$ .  
Як взаємно розміщуються площини  $\alpha$  і  $\beta$ ?
- 229°.** Дві сторони паралелограма паралельні даній площині  $\alpha$ .  
Чи можна стверджувати, що площина паралелограма паралельна площині  $\alpha$ ?
- 230°.** Скільки площин, паралельних даній площині, можна провести через:  
1) точку, що не лежить у даній площині;  
2) пряму, що паралельна даній площині?
- 231.** Площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються.  
Доведіть, що будь-яка площина  $\gamma$  перетинає хоча б одну з площин  $\alpha$  і  $\beta$ .
- 232.** Площина  $\beta$  перетинає деяку пряму, паралельну площині  $\alpha$ .  
Доведіть, що площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються.
- 233.**  $\alpha$  і  $\beta$  — паралельні площини.  
Точка  $A$  лежить у площині  $\alpha$ .  
Доведіть, що будь-яка пряма, що проходить через точку  $A$  паралельно площині  $\beta$ , лежить у площині  $\alpha$ .
- 234.** Якщо площина  $\alpha$  паралельна площині  $\beta$ , а площина  $\beta$  паралельна площині  $\gamma$ , то площина  $\alpha$  паралельна площині  $\gamma$ .  
Доведіть.
- 235.** Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні площині  $\gamma$ .  
Чи можуть площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинатися?
- 236.** Площина  $\gamma$  перетинає площини  $\alpha$  і  $\beta$  по паралельних прямим.  
Чи паралельні площини  $\alpha$  і  $\beta$ ?
- 237.** Дано куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .  
Доведіть паралельність площин:  
1)  $ACB_1$  і  $A_1 C_1 D$ ; 2)  $B_1 D_1 C$  і  $BDA_1$ .
- 238.** Дано дві мимобіжні прямі.  
Доведіть, що існує тільки одна пара площин, кожна з яких проходить через одну з даних прямих.
- 239.** Як провести паралельні площини через дві дані мимобіжні прямі?

- 240.**  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  — пряма призма, в основі якої лежить правильний шестикутник. Чи паралельні між собою площини, які проходять через точки:
- 1)  $A, A_1, C_1$  і  $D, D_1, F_1$ ;
  - 2)  $A, A_1, B$  і  $C, C_1, F$ ;
  - 3)  $A, B_1, C$  і  $D, E_1, F$ ;
  - 4)  $A, A_1, D$  і  $C, C_1$  та середину ребра  $AB$ ?
- 241.** Точки  $A, B, C$  і  $D$  не лежать в одній площині. Середини відрізків  $AB, BC, AC, AD, CD$  і  $BD$  позначено відповідно  $K, L, M, N, E$  і  $F$ .  
Чи паралельні площини:  
1)  $BCD$  і  $KMN$ ; 2)  $ABD$  і  $LME$ ; 3)  $ACD$  і  $KLF$ ?  
Відповідь обґрунтуйте.
- 242\*.** Дано дві площини, які перетинаються.  
Чи можна провести площину, яка перетинає дві дані площини по паралельних прямих?  
Скільки таких площин можна провести через дану:  
1) точку;  
2) пряму, яка паралельна даним площинам;  
3) пряму, яка паралельна одній з даних площин;  
4) пряму, яка перетинає дані площини;  
5) пряму, яка лежить в одній з даних площин?
- 243\*.** У кубі  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  побудуйте лінії перетину площин:  
1)  $AB_1 D_1$  і  $A_1 B D$ ;  
2)  $A_1 B C$  і  $B_1 B D$ ;  
3)  $A_1 D_1 C$  і  $AB_1 D$ .
- 244\*.** Спільна вершина двох трикутників не лежить у даній площині, а протилежні цій вершині сторони трикутників лежать у даній площині.  
Побудуйте лінію перетину площин даних трикутників.  
Скільки випадків треба розглянути?
- 245\*.** Через пряму  $a$ , що лежить в одній з паралельних площин, проведено площини, які перетинають другу площину по прямих  $a_1, a_2, a_3, \dots$ .  
Як взаємно розміщуються дані прямі? Відповідь обґрунтуйте.
- 246\*.** Скільки пар відповідно паралельних площин можна провести через дві паралельні прямі у просторі?
- 247\*.** Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.
- 248\*.** Кожна пряма, яка проходить через задану точку площини паралельно деякій прямій, що паралельна даній площині, лежить у даній площині. Доведіть.
- 249\*.** Чи можуть бути паралельними:  
1) дві бічні грані призми;  
2) три бічні грані призми?

- 250\***. В основі прямої призми лежить правильний п'ятикутник.  
Доведіть, що площина, яка проходить через бічне ребро і діагональ основи призми, паралельна площині однієї з її бічних граней.
- 251\***. Дослідіть, як можуть взаємно розміщуватися три площини, якщо:
- 1) дві з них паралельні;
  - 2) вони попарно перетинаються.


### ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 252.** Які випадки взаємного розміщення двох площин можна проілюструвати за допомогою зошита?
- 253.** Яке взаємне розміщення книг на повністю заповненій полиці, якщо книги щільно прилягають одна до одної?  
А якщо зняти декілька книг з полиці?
- 254.** Чи можна перевірити паралельність підлоги і стелі кімнати за допомогою:
- 1) двох прямих у цих площинах;
  - 2) трьох прямих у цих площинах;
  - 3) чотирьох прямих у цих площинах.
- Якщо так, то як саме?  
Запропонуйте власний спосіб перевірки.
- 255.** Щоб з'ясувати, чи не деформувалися дерев'яні двері під час експлуатації, їх зачінають і обирають на їх периметрі кілька контрольних точок.  
Якщо в цих точках полотно дверей не однаково розміщується відносно дверної коробки (в одному місці заглиблюється, а в іншому виступає), то двері — деформовані.  
Скільки контрольних точок достатньо обрати?  
На чому ґрунтується такий спосіб перевірки?





## §7. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЛОЩИН

 Важливі властивості паралельних площин пов'язані з площиною, що їх перетинає. Цю площину називають *січною площиною*.



### Теорема

(про паралельні площини і січну площину).

Якщо дві паралельні площини перетнуті третьою, то прямі перетину паралельні.

**Дано:**  $\alpha \parallel \beta$ ,

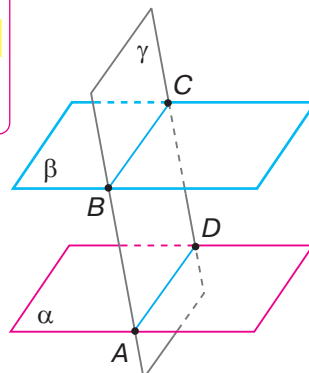
$\gamma$  — січна площина,

$AD$  — пряма перетину площин  $\alpha$  і  $\gamma$ ,

$BC$  — пряма перетину площин  $\beta$  і  $\gamma$  (мал. 139).

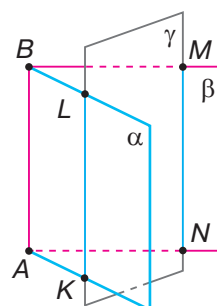
**Довести:**  $AD \parallel BC$ .

**Доведення.** За умовою, прямі  $AD$  і  $BC$  лежать у січній площині  $\gamma$ . Вони не можуть перетинатися, бо інакше перетиналися б площини  $\alpha$  і  $\beta$ , а це суперечить умові. Отже,  $AD \parallel BC$ .



Мал. 139

**?** Чи правильне твердження, обернене до теореми про паралельні площини і січну площину? Ні. З того, що прямі перетину двох даних площин третьою паралельні, не випливає, що дані площини паралельні (мал. 140).

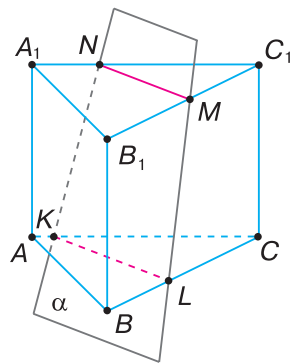


Мал. 140

**Задача.** Доведіть, що січна площина перетинає основи прямої призми по паралельних прямих.

**Розв'язання.** Нехай  $ABCA_1B_1C_1$  — дана призма з основами  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  (мал. 141), січна площина  $\alpha$  перетинає її основи по прямих  $KL$  і  $MN$ . Доведемо, що  $KL \parallel MN$ .

Оскільки бічними гранями прямої призми є прямокутники, то  $AB \parallel A_1B_1$  і  $BC \parallel B_1C_1$ . Тоді, за ознакою паралельності площин, площини основ призми  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  — паралельні. За теоремою про паралельні площини і січну площину, прямі перетину  $KL$  і  $MN$  площин основ призми січною площиною  $\alpha$  — паралельні.



Мал. 141



Пам'ятайте, що:

- у прямої призми основи паралельні;
- у прямокутного паралелепіпеда протилежні грані попарно паралельні;
- січна площина перетинає паралельні грані многогранника по паралельних прямих.



**Теорема (про рівність кутів між прямими, що перетинаються).**

Якщо дві прямі, що перетинаються, відповідно паралельні двом іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими.

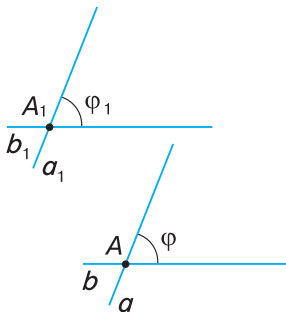
**Дано:**  $a \times b$  в точці  $A$ ,  $a_1 \times b_1$  в точці  $A_1$ ,  $a \parallel a_1$ ,  $b \parallel b_1$ ,

$\varphi$  – кут між прямими  $a$  і  $b$ ,  $\varphi_1$  – кут між прямими  $a_1$  і  $b_1$  (мал. 142).

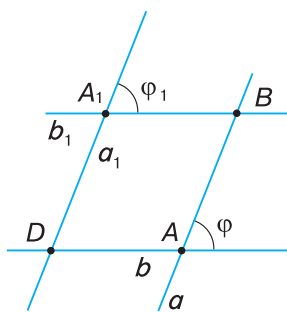
**Довести:**  $\varphi = \varphi_1$ .

**Доведення.** Якщо прямі  $a$ ,  $b$ ,  $a_1$  і  $b_1$  лежать в одній площині, тоді пряма  $a$  перетинається з прямою  $b_1$ , а пряма  $b$  – з прямою  $a_1$  (мал. 143). Позначимо точки їх перетину  $B$  і  $D$ . Чотирикутник  $ABA_1D$  – паралелограм, оскільки в нього протилежні сторони попарно паралельні. Тому  $\varphi = \varphi_1$ .

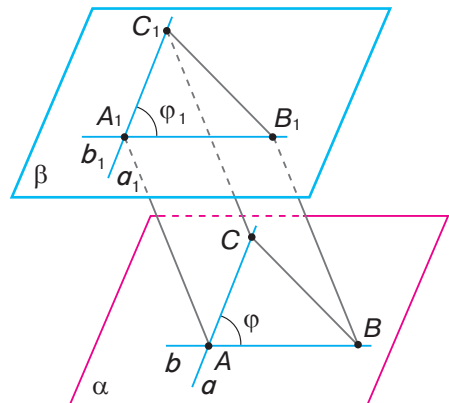
Нехай прямі  $a$ ,  $b$ ,  $a_1$  і  $b_1$  не лежать в одній площині (мал. 144). Через прямі  $a$  і  $b$  проведемо площину  $\alpha$ , а через прямі  $a_1$  і  $b_1$  – площину  $\beta$ . За ознакою паралельності площин,  $\alpha \parallel \beta$ . Відкладемо на даних прямих рівні відрізки  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  і проведемо прямі  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $BC$  і  $B_1C_1$ . Чотирикутник  $ABB_1A_1$  – паралелограм, оскільки протилежні сторони  $AB$  і  $A_1B_1$  рівні й паралельні. Тому відрізки  $AA_1$  і  $BB_1$  також рівні і паралельні. Аналогічно, рівні й паралельні відрізки  $AA_1$  і  $CC_1$ . Звідси  $BB_1 = CC_1$ ,  $BB_1 \parallel CC_1$  і чотирикутник  $BB_1C_1C$  – паралелограм. Тому  $BC = B_1C_1$  і  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  за трьома сторонами. Звідси  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ . Оскільки  $\angle BAC = \varphi$  і  $\angle B_1A_1C_1 = \varphi_1$ , то  $\varphi = \varphi_1$ .



Мал. 142



Мал. 143



Мал. 144

**Наслідок 1** (властивість перпендикулярних прямих).

Дві прямі, що паралельні перпендикулярним прямим, перпендикулярні.

Твердження безпосередньо випливає з доведеної теореми, якщо  $\varphi = 90^\circ$ .

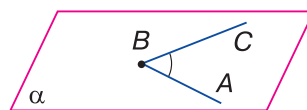
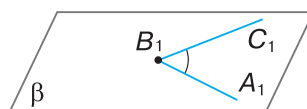
**Наслідок 2.** Кут між мимобіжними прямими не залежить від вибору точки, через яку проходять прямі, що перетинаються і відповідно паралельні даним мимобіжним прямим.

Твердження безпосередньо випливає з доведеної теореми.

**Наслідок 3** (властивість кутів з відповідно паралельними й однакою напрямленими сторонами).

Два кути з відповідно паралельними й однакою напрямленими сторонами рівні (мал. 145).

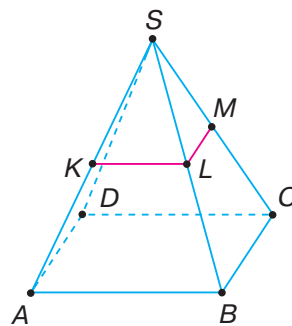
Справді, сторони кожного з даних кутів є променями відповідної пари прямих, що перетинаються у вершині цього кута. За теоремою про рівність кутів між прямими, що перетинаються,  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ .



Мал. 145

**Задача.**  $KL$  і  $LM$  — середні лінії бічних граней  $SAB$  і  $SBC$  правильної чотирикутної піраміди  $SABCD$  (мал. 146). Яка градусна міра кута  $KLM$ ?

**Розв'язання.** Оскільки  $KL$  і  $LM$  — середні лінії трикутників  $SAB$  і  $SBC$ , то  $KL \parallel AB$  і  $LM \parallel BC$ . Кути  $KLM$  і  $ABC$  мають однакою напрямлені сторони, бо лежать у відповідних площинах по один бік від прямої  $SB$ . Тому, за властивістю кутів з відповідно паралельними й однакою напрямленими сторонами,  $\angle KLM = \angle ABC$ . За умовою, дана піраміда — правильна, тому  $\angle ABC = 90^\circ$ . Отже,  $\angle KLM = 90^\circ$ .



Мал. 146

### ДИЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Математики у своїх міркуваннях часто застосовують *аналогію*. У перекладі з грецької мови «аналогія» означає подібність, схожість предметів або явищ за якими-небудь властивостями, ознаками, відношеннями, причому самі ці предмети, взагалі, різні. Багато питань стереометрії вивчається за аналогією до питань планіметрії. Аналогом точки на площині є пряма у просторі, а прямої на площині — площина у просторі.

У таблиці 7 наведено деякі властивості взаємного розміщення точок і прямих на площині та властивості прямих і площин у просторі, які сформульовано за аналогією.

Таблиця 7

На площині	У просторі
Якщо дві прямі мають спільну точку, то вони перетинаються у цій точці	Якщо дві площини мають спільну пряму, то вони перетинаються по цій прямій
Через будь-яку точку на площині можна провести безліч прямих	Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин
Через точку, яка не лежить на прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну	Через пряму, яка не перетинає площину, можна провести площину, паралельну даній площині, і тільки одну
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою	Дві площини, паралельні третій площині, паралельні між собою

За аналогією іноді можна дістати хибне твердження. Наприклад, якщо у третьому з наведених тверджень для простору замість вимоги «не перетинає площину» вказати вимогу «не лежить у площині», то дістанемо хибне твердження.

Справді, пряма, що не лежить у площині, може перетинати цю площину, а через таку пряму провести площину, паралельну даній площині, неможливо. Тому твердження, отримане за аналогією, потребує доведення.

### ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

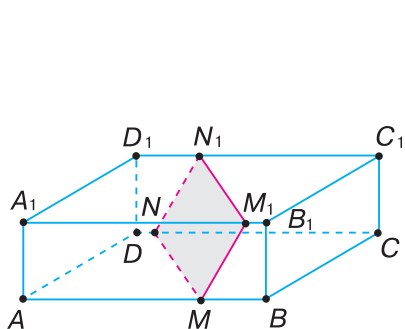
1. Поясніть, що таке січна площина для двох даних паралельних прямих.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про паралельні площини і січну площину.
3. Як формулюється теорема про рівність кутів між прямими, що перетинаються? Доведіть її.
4. Яка властивість перпендикулярних прямих у просторі?
5. Поясніть, від чого не залежить кут між мимобіжними прямими.
6. Яку властивість мають кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами?

**РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ**

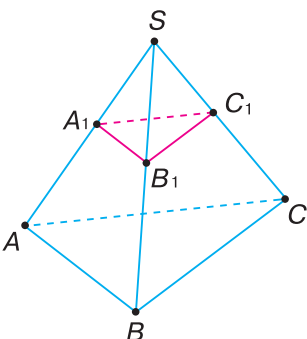
**256'.** На малюнках 147 – 149 назвіть січну площину та прямі її перетину з паралельними площинами  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$ . Яке взаємне розміщення прямих перетину? Скільки січних площин для даних паралельних площин зображено на малюнку?

**257'.** Наведіть приклади паралельних площин і січної площини на предметах класної обстановки.

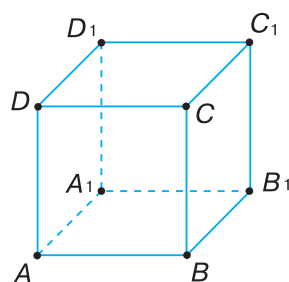
**258'.** За малюнками 147 – 149 з'ясуйте, чи виконується рівність:  $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ , якщо площини  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  – паралельні. Відповідь поясніть.



Мал. 147



Мал. 148

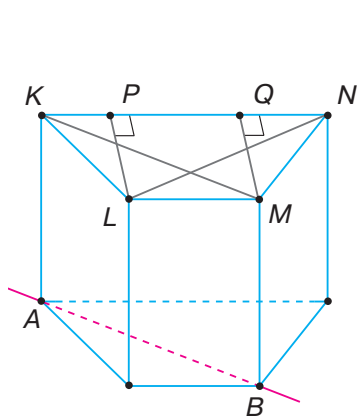


Мал. 149

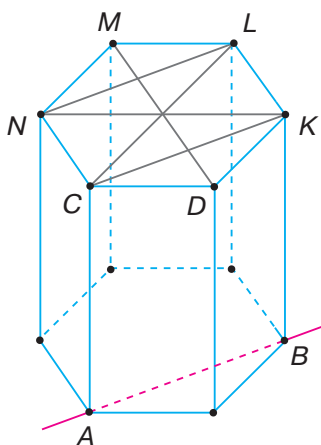
**259'.** Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють властивість:

- 1) перпендикулярних прямих;
- 2) кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами.

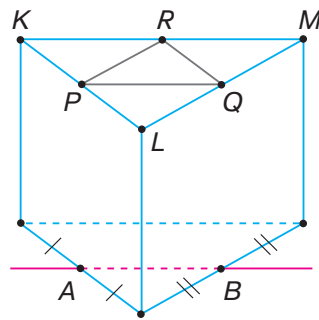
**260°.** Січна площина перетинає нижню основу призми по прямої  $AB$  (мал. 150 – 152). По якій з прямих, позначених на малюнку, січна площина не може перетинати верхню основу даної призми? Відповідь поясніть.



Мал. 150



Мал. 151



Мал. 152

**261°.** Накресліть прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

Проведіть січну площину, яка перетинає вказані паралельні площини:

- 1)  $ABC$  і  $A_1 B_1 C_1$ ;
- 2)  $ADD_1$  і  $BCC_1$ ;
- 3)  $ABB_1$  і  $C_1 CD$ .

Чи перетинає побудована січна площина іншу пару паралельних площин?

Назвіть прямі перетину січної площини з паралельними площинами.

Яке їх взаємне розміщення?

Зробіть відповідний запис.

**262°.** Накресліть пряму чотирикутну призму  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , основою якої є трапеція з основами  $AB$  і  $CD$ .

Які грані призми паралельні, а які — не паралельні?

Проведіть січну площину, яка:

- 1) проходить через ребра  $AB$  і  $C_1 D_1$ ;
- 2) перетинає основи призми і не проходить через їх ребра;
- 3) проходить через середини бічних ребер.

Назвіть пари паралельних відрізків, що лежать у січній площині та у відповідних гранях призми.

**263°.** Паралельні площини  $\alpha$  і  $\beta$  відтинають на сторонах  $BA$  і  $BC$  кута  $ABC$  відрізки:  $BM = MM_1$  і  $BN = NN_1$ .

Заповніть таблицю 8.

Таблиця 8

$BM$	5			10		13
$BM_1$		7	12		3	
$BN$	12		5			21
$BN_1$		7		18	5	
$MN$	13		9	17		20
$M_1 N_1$		10			4	

**264°.** Накресліть:

- 1) прямокутний паралелепіпед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;
- 2) куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

На ребрі  $AB$  позначте точку  $K$  і через неї проведіть січну площину паралельно грані  $AA_1 D_1 D$ .

Який чотирикутник утворився в перерізі?

Відповідь поясніть.

**265°.** Накресліть правильну призму:

- 1)  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;
- 2)  $ABCA_1 B_1 C_1$ .

Позначте точку  $A_2$  на ребрі  $AA_1$  призми і через цю точку проведіть січну площину паралельно нижній основі призми.

Який многокутник утворився в перерізі?

Позначте його вершини  $A_2, B_2 \dots$ .

Назвіть кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами.

Яка їх градусна міра?

**266°.** Накресліть трикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник:

- 1) з кутом при вершині  $110^\circ$ ;
- 2) з кутом при основі  $50^\circ$ ;
- 3) з кутом при вершині  $30^\circ$ .

Через середини бічних ребер піраміди проведіть січну площину.

Який многокутник утворився в перерізі?

Які в нього кути?

Відповідь поясніть.

**267°.** Накресліть чотирикутну піраміду, в основі якої лежить ромб з кутом:

- 1)  $100^\circ$ ; 2)  $40^\circ$ ; 3)  $60^\circ$ .

Через середини бічних ребер піраміди проведіть січну площину.

Який многокутник утворився в перерізі?

Які в нього кути?

Відповідь поясніть.

**268.** Дві сторони паралелограма паралельні площині  $\alpha$ .

Чи можна стверджувати, що площина паралелограма паралельна площині  $\alpha$ ?

**269.** Бічна сторона і діагональ трапеції паралельні площині  $\alpha$ .

Чи паралельні площина  $\alpha$  і площина трапеції?

**270.** Дві сторони трикутника паралельні площині  $\alpha$ .

**Доведіть, що і третя сторона трикутника паралельна площині  $\alpha$ .**

**271.** Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  площиною, яка паралельна даній грані й проходить через середину заданого ребра:

- 1)  $SAB, SC$ ;
- 2)  $SBC, SA$ .

Поясніть побудову.

**272.** У кубі з ребром  $a$  проведіть площину через:

- 1) середини двох суміжних сторін верхньої основи і центр нижньої;
- 2) середини двох суміжних сторін бічної грані і центр протилежної бічної грані.

Знайдіть периметр і площу перерізу.

**273.** Чи може пряма, яка перетинає одну з двох паралельних площин, не перетинати другу?

Відповідь обґрунтуйте.

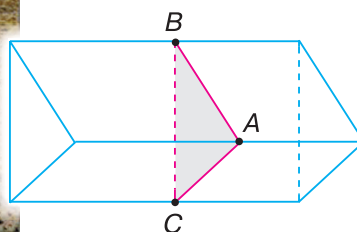
- 274.** Паралельні площини відтинають від двох паралельних прямих рівні відрізки. Доведіть.
- 275.** Чи можуть паралельні площини відтинати рівні відрізки від непаралельних прямих?  
Відповідь обґрунтуйте.
- 276.** Дано дві паралельні площини. Через точки  $A$  і  $B$  однієї з них проведено паралельні прямі, що перетинають другу площину відповідно у точках  $D$  і  $C$ . Доведіть, що чотирикутник  $ABCD$  — паралелограм.
- 277.** Паралельні площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинають сторону  $AB$  кута  $BAC$  у точках  $M$  і  $M_1$ , а сторону  $AC$  — відповідно у точках  $N$  і  $N_1$ .  
Знайдіть довжину відрізка  $MN$ , якщо:  
1)  $AM = 12$  см,  $AM_1 = 18$  см,  $M_1N_1 = 54$  см;  
2)  $AM = 24$  см,  $AM_1 = 18$  см,  $M_1N_1 = 54$  см.
- 278.** Відрізки  $AA_1$ ,  $BB_1$  і  $CC_1$ , які не лежать в одній площині, мають спільну середину. Доведіть, що площини  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  паралельні.  
Чому дорівнюють кути  $\Delta A_1B_1C_1$ , якщо:  
1)  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ;  
2)  $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 70^\circ$ ?
- 279.** Точка  $D$  не лежить у площині трикутника  $ABC$ , точки  $M$ ,  $N$  і  $P$  — середини відрізків  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$ .  
Доведіть, що площини  $ABC$  і  $MNP$  паралельні.  
Чому дорівнюють кути  $\Delta ABC$ , якщо:  
1)  $\angle M = 120^\circ$ ,  $\angle N = 25^\circ$ ,  $\angle P = 35^\circ$ ;  
2)  $\angle M = 40^\circ$ ,  $\angle N = 40^\circ$ ,  $\angle P = 80^\circ$ ?
- 280\*.** Доведіть, що три прямі, які перетинають кілька паралельних площин, визначають на кожній з них вершини трикутників, що є:  
1) рівними, якщо дані прямі паралельні;  
2) подібними, якщо дані прямі перетинаються в одній точці.
- 281\*.** Доведіть, що середини всіх відрізків, кінці кожного з яких лежать у двох даних паралельних площинах, належать одній площині.
- 282\*.**  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  — пряма призма, в основі якої лежить правильний шестикутник.  
Чи паралельна пряма  $AD_1$  площині  $BCC_1$ ?  
Відповідь обґрунтуйте.
- 283\*.** У кубі  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  проведено площини:  
1)  $A_1BD$  і  $B_1CD_1$ ;  
2)  $AB_1D_1$  і  $BDC_1$ .  
Доведіть, що дані площини ділять відрізок  $AC_1$  (для другого випадку  $A_1C$ ) на три рівні частини.



- 284\*.** Дано дві паралельні площини і точку  $O$ , що не належить їм.  
З точки  $O$  проведено три прямі, які перетинають дані площини відповідно в точках  $A, B, C$  і  $A_1, B_1, C_1$ .  $OA = m$ ,  $AA_1 = n$ ,  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ .  
Знайдіть: 1)  $A_1B_1$ ; 2) площу  $\Delta A_1B_1C_1$ .
- 285\*.** Два рівних рівносторонніх трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  розміщені у просторі так, що сторони їх відповідних кутів паралельні й однаково напрямлені.  $BE$  і  $CD$  — висоти  $\Delta ABC$ ,  $C_1D_1$  — висота  $\Delta A_1B_1C_1$ .  
Знайдіть кути між прямими:  
1)  $AC$  і  $B_1C_1$ ; 2)  $AC$  і  $A_1B_1$ ;  
3)  $CD$  і  $A_1B_1$ ; 4)  $AC$  і  $C_1D_1$ ;  
5)  $BE$  і  $B_1C_1$ ; 6)  $BE$  і  $C_1D_1$ .
- 286\*.** Два рівних рівносторонніх трикутники  $ABC$  і  $A_1B_1C_1$  розміщені у просторі так, що сторони їх відповідних кутів паралельні, але протилежно напрямлені.  $BE$  і  $CD$  — висоти  $\Delta ABC$ ,  $C_1D_1$  — висота  $\Delta A_1B_1C_1$ .  
Знайдіть кути між прямими:  
1)  $AC$  і  $B_1C_1$ ; 2)  $AC$  і  $A_1B_1$ ;  
3)  $CD$  і  $A_1B_1$ ; 4)  $AC$  і  $C_1D_1$ ;  
5)  $BE$  і  $B_1C_1$ ; 6)  $BE$  і  $C_1D_1$ .


### ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

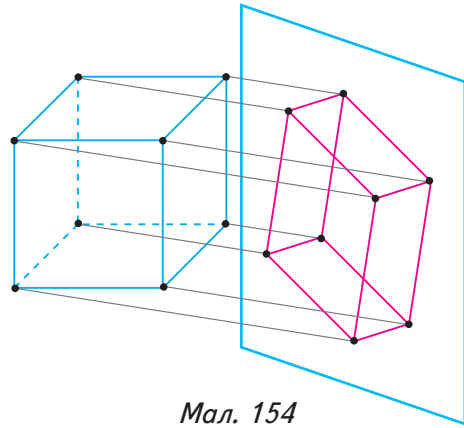
- 287.** Чому можна одночасно висунути усі шухляди тумбочки?
- 288.** Поясніть, як розмітити на стінках шафи місця для кріплення полицок.
- 289.** Як перевірити за допомогою косинця, чи правильно навісили двері. На якій властивості ґрунтується така перевірка?
- 290.** Канал з трикутним перерізом і глибиною 2,8 м перегороджено щитом, який має форму рівностороннього трикутника.  
Щоб визначити гідростатичний тиск на перегородку, треба знати її площу.  
Обчисліть площу трикутного щита  $ABC$ , якщо його розміщено вертикально (мал. 153).



Мал. 153

## §8. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ


 Ви вже знаєте, що для вивчення властивостей просторових фігур користуються макетами цих фігур або їх зображеннями на площині. На малюнку 154 ви бачите каркасний макет куба, який розміщено перед екраном (стіною, аркушем паперу), освітленим сонцем. Макет куба дає на екрані тінь, яка є зображенням куба на площині. Якщо промені сонця вважати паралельними прямими, то можна сказати, що зображення куба дістали за допомогою *паралельного проектування*.

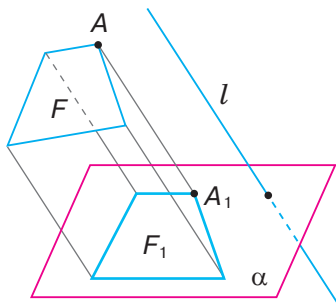


Мал. 154

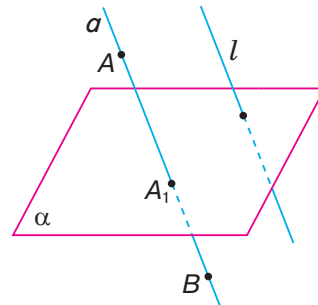
Подивіться на малюнок 155. Пряма  $l$  перетинає площину  $\alpha$ . Через точку  $A$  фігури  $F$  проведено пряму, яка паралельна прямій  $l$  і перетинає площину  $\alpha$  в точці  $A_1$ . Ця точка є *зображенням* точки  $A$  в площині  $\alpha$ . Побудувавши у такий спосіб зображення кожної точки фігури  $F$ , дістали фігуру  $F_1$  – зображення фігури  $F$  у площині  $\alpha$ . Фігура, яку проектували, називається *оригіналом*. Зображення фігури, яке дістали, називається *паралельною проекцією* цієї фігури. Пряма  $l$  задає *напрямок проектування*. Прямі, паралельні прямій  $l$ , називаються *проектувальними прямими*, а площина  $\alpha$  – *площиною проєкцій*.

**?** Що є проекцією прямої, яка паралельна напрямку проектування? Точка, бо кожна точка даної прямої проектується в ту саму точку площини проєкцій (мал. 156).

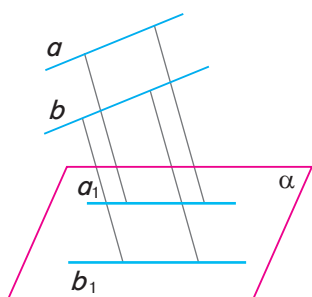
 При паралельному проектуванні прямі й відрізки, що проектуються, вважають не паралельними напрямку проектування, якщо про це спеціально не зазначено.



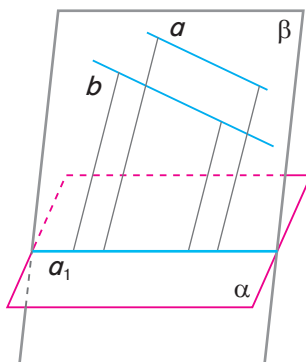
Мал. 155



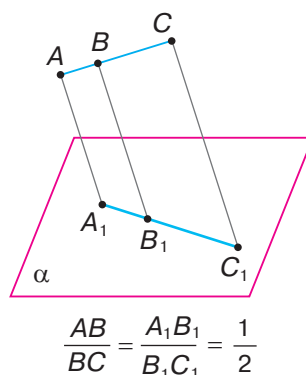
Мал. 156



Мал. 157



Мал. 158



Мал. 159

Наведемо основні властивості паралельного проектування.

1. Паралельною проекцією точки є точка.
2. Паралельною проекцією прямої є пряма.
3. Проекції паралельних прямих паралельні між собою (мал. 157) або збігаються, якщо дані прямі лежать у площині, паралельній напрямку проектування (мал. 158).
4. Якщо відрізки лежать на одній прямій або на паралельних прямих, то відношення їх проекцій дорівнює відношенню самих відрізків (мал. 159).

З наведених властивостей випливає, що під час паралельного проектування деякі властивості фігур зберігаються, а деякі – ні (див. табл. 9).

Таблиця 9

Властивості фігур, що <b>ЗБЕРІГАЮТЬСЯ</b> під час паралельного проектування	Властивості фігур, що <b>НЕ ЗБЕРІГАЮТЬСЯ</b> під час паралельного проектування
<ol style="list-style-type: none"> <li>1) <b>Належність фігури своєму класу фігур</b> (точку зображають точкою, пряму – прямою, відрізок – відрізком, трикутник – трикутником тощо);</li> <li>2) <b>належність точок прямій;</b></li> <li>3) <b>порядок розміщення точок на прямій</b> (внутрішню точку відрізка зображають внутрішньою точкою його проекції);</li> <li>4) <b>паралельність прямих;</b></li> <li>5) <b>рівність (пропорційність) відрізків, що лежать на паралельних прямих або на одній прямій</b></li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) <b>Довжина відрізка;</b></li> <li>2) <b>міра кута</b> (зокрема прямий кут зображають довільним кутом);</li> <li>3) <b>перпендикулярність прямих;</b></li> <li>4) <b>рівність (пропорційність) кутів;</b></li> <li>5) <b>рівність (пропорційність) відрізків, які лежать на прямих, що перетинаються</b></li> </ol>



**Задача 1.** Побудуйте паралельну проекцію прямокутної трапеції  $ABCD$ , у якої  $AD \perp AB$ ,  $AB : DC = 2 : 1$ ,  $MN$  — середня лінія.

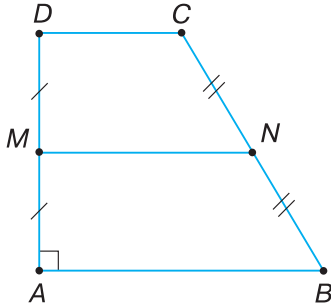
**Розв'язання.** Спочатку побудуємо оригінал даної трапеції (мал. 160). Спираючись на нього, з'ясуємо властивості шуканої проекції.

Трапеція є чотирикутником, тому її проекція також є чотирикутником. Позначимо його  $A_1B_1C_1D_1$ . У даній трапеції: основи  $AB$  і  $DC$  паралельні, тому їх проекції  $A_1B_1$  і  $D_1C_1$  теж паралельні; бічні сторони  $AD$  і  $BC$  не паралельні, тому їх проекції  $A_1D_1$  і  $B_1C_1$  теж не паралельні. Отже, чотирикутник  $A_1B_1C_1D_1$  — трапеція.

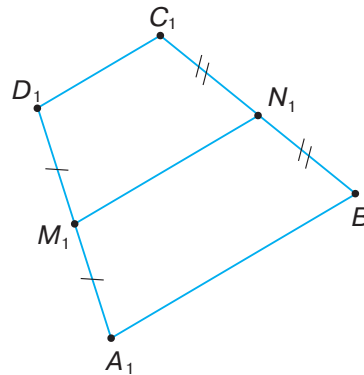
За умовою,  $AB : DC = 2 : 1$ , тому  $A_1B_1 : D_1C_1 = 2 : 1$ , бо зберігається відношення відрізків, що лежать на паралельних прямих. За умовою,  $AD \perp AB$ . Оскільки перпендикулярність прямих не зберігається під час паралельного проектування, то у проекції  $\angle D_1A_1B_1$  не обов'язково прямий. Отже, дана прямокутна трапеція може зображуватися не прямокутною трапецією (мал. 161).

Точки  $M$  і  $N$  є серединами бічних сторін  $AD$  і  $BC$  відповідно. Оскільки зберігається належність точок прямій та їх порядок на прямій, а також рівність відрізків, що лежать на одній прямій, то проекції  $M_1$  і  $N_1$  даних точок є серединами бічних сторін  $A_1D_1$  і  $B_1C_1$  проекції  $A_1B_1C_1D_1$ . Отже, середня лінія трапеції зображується середньою лінією її проекції.

Трапеція  $A_1B_1C_1D_1$  — шукана.



Мал. 160

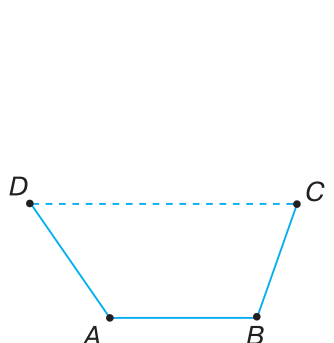


Мал. 161

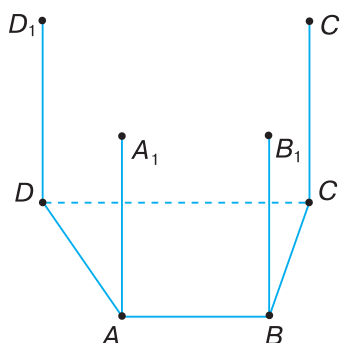


**Щоб побудувати паралельну проекцію плоскої фігури, спочатку побудуйте її оригінал. Потім, спираючись на оригінал, виділіть властивості фігури:**

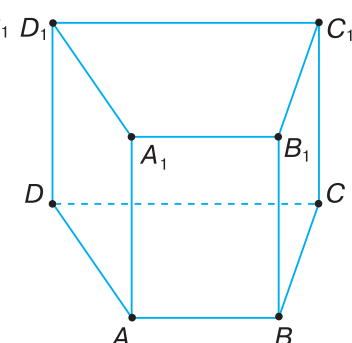
- які зберігаються під час паралельного проектування (на них треба спиратися, будуючи проекцію);
- які не зберігаються під час паралельного проектування (їх не можна використовувати, будуючи проекцію).



Мал. 162



Мал. 163



Мал. 164

**?** Як побудувати паралельну проекцію многогранника? Для цього треба з'ясувати, як зображуватимуться усі його грані, та послідовно виконати побудову проекції кожної з них. Розглянемо приклади.



**Задача 2.** Побудуйте зображення прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , основою якої є рівнобічна трапеція.



**Розв'язання.** Побудову призми виконуємо в три етапи:

- 1) будуємо зображення однієї з основ; 2) проводимо бічні ребра;
- 3) будуємо зображення другої основи.

1. В основі даної призми лежить рівнобічна трапеція. Її паралельні сторони проєктуються в паралельні відрізки, а не паралельні — в не паралельні й не обов'язково рівні відрізки. Тому проєкцією основи даної призми є довільна трапеція  $ABCD$  (мал. 162).

2. Бічними гранями прямої призми є прямокутники, отже, їх проєкціями є паралелограми. Тому проєкції бічних ребер є рівними паралельними відрізками. Проводимо їх паралельно вертикальному краю аркуша (мал. 163).

3. Сполучивши кінці паралельних відрізків, дістанемо зображення другої основи даної призми. При цьому враховується те, що основи призми — рівні многокутники, які лежать у паралельних площинах. Отже, їх проєкції є рівними многокутниками з відповідно паралельними сторонами (мал. 164).

Пряма призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — шукана.



**Пам'ятайте, що на зображенні многогранника видимі лінії проводимо суцільними лініями, а невидимі — штриховими.**

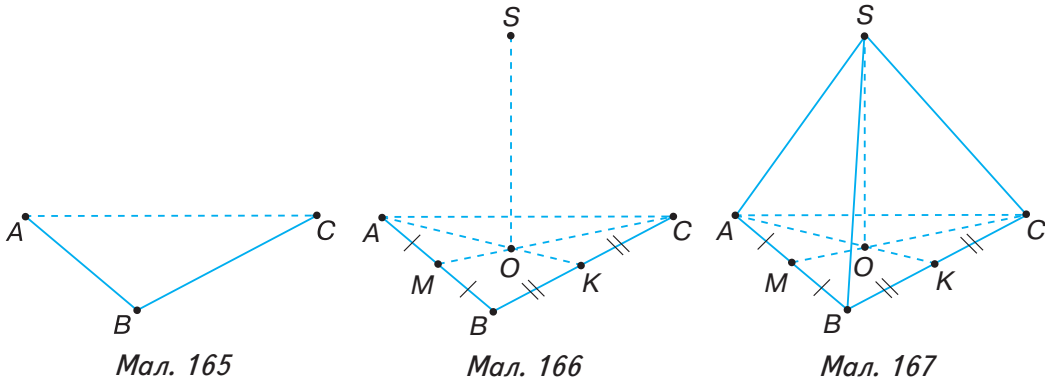


**Задача 3.** Побудуйте зображення правильної трикутної піраміди  $SABC$ .



**Розв'язання.** Побудову піраміди виконуємо в три етапи:

- 1) будуємо зображення основи;
- 2) з'ясуємо розміщення висоти і вершини піраміди;
- 3) проводимо бічні ребра.



Мал. 165

Мал. 166

Мал. 167

1. В основі даної піраміди лежить правильний трикутник. Його проекцією є довільний трикутник  $ABC$  (мал. 165), оскільки рівність сторін правильного трикутника та рівність його кутів не зберігаються під час проектування.

2. Вершина правильної піраміди лежить на прямій, що містить висоту піраміди. Висота даної піраміди проходить через точку перетину медіан її основи. Через цю точку проводимо пряму паралельно вертикальному краю аркуша. На цій прямій позначаємо довільну точку  $S$ .

Дістали зображення вершини піраміди (мал. 166).

3. Сполучивши вершину піраміди з вершинами її основи, дістанемо зображення бічних ребер піраміди. При цьому враховується те, що: бічними гранями правильної піраміди є рівні рівнобедрені трикутники; на зображенні рівність бічних сторін цих трикутників не зберігається. Тому проекції бічних ребер піраміди — це відрізки довільної довжини, що з'єднують вершину піраміди з вершинами її основи (мал. 167).

Піраміда  $SABC$  — шукана.



**Пам'ятайте, що:**

- розміщення висоти піраміди залежить від властивостей піраміди;
- якщо піраміда правильна, то її висота проходить через центр многокутника основи;
- висоту піраміди проводять паралельно вертикальному краю аркуша;
- розміщення вершини піраміди визначають після побудови її висоти.



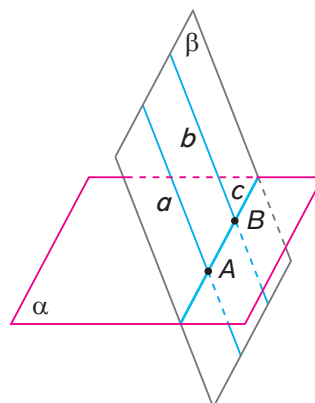
**ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ**

1. Побудова зображень просторових фігур під час паралельного проектування ґрунтується на такій властивості паралельних прямих: **Якщо одна з паралельних прямих перетинає площину, то і друга пряма перетинає цю площину.**

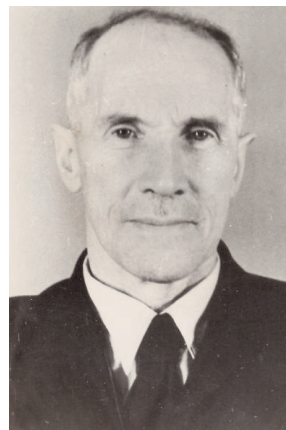
Доведемо цю властивість.

Нехай  $a$  і  $b$  — паралельні прямі,  $a$  перетинає площину  $\alpha$  в точці  $A$  (мал. 168). Доведемо, що і пряма  $b$  перетинає площину  $\alpha$ .

Через паралельні прямі  $a$  і  $b$  проведемо площину  $\beta$ . Оскільки пряма  $a$  перетинає площину  $\alpha$  в точці  $A$ , то площини  $\alpha$  і  $\beta$  перетинаються по прямій  $c$ , яка проходить через точку  $A$ . У площині  $\beta$  пряма  $c$  перетинає пряму  $a$ , отже, вона перетинає і пряму  $b$ . Позначимо  $B$  точку перетину прямих  $b$  і  $c$ . Точка  $B$  належить прямій перетину площин  $\alpha$  і  $\beta$ , отже, вона лежить у площині  $\alpha$ . Дістали, що пряма  $b$  має спільну точку  $B$  з площиною  $\alpha$ . Інших спільних точок вони не мають, бо тоді пряма  $b$  збігалася б з прямою  $c$ , що неможливо. Отже, пряма  $b$  перетинає площину  $\alpha$ .



Мал. 168



М. Ф. Четверухін

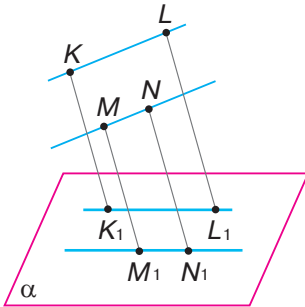
2. Значний вклад у розвиток теорії зображень просторових фігур на площині вніс російський геометр М. Ф. Четверухін (1891 — 1974). Він обґрунтував можливість побудови наочного зображення просторових фігур більш простими способами, ніж це робиться в *аксонометрії* — науковій теорії про способи зображення геометричних фігур. Завдяки досягненням вченого елементи теорії зображень стали доступними для вивчення у шкільному курсі геометрії.

### ✓ ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке паралельне проектування; площина проєкцій; проєктувальні прямі?
2. Назвіть властивості паралельного проектування.
3. Які властивості фігур зберігаються під час паралельного проектування?
4. Назвіть властивості фігур, які не зберігаються під час паралельного проектування.
5. Якою фігурою може бути паралельна проєкція трикутника; паралелограма; прямокутника; трапеції?
6. Поясніть, як побудувати зображення прямої призми; піраміди.

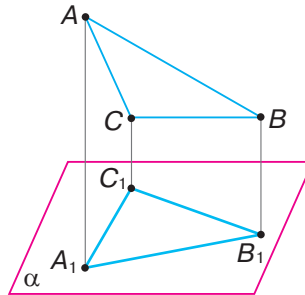
### РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

- 291'**. На малюнках 169 – 171 зображено фігуру-оригінал та її паралельну проєкцію у площині  $\alpha$ . Назвіть:
- 1) фігуру, яку проєктували;
  - 2) проєктувальні прямі;
  - 3) паралельну проєкцію даної фігури.

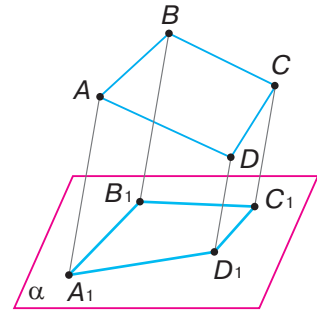


$$KL \parallel MN$$

Мал. 169



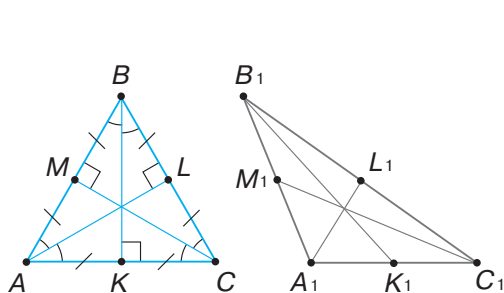
Мал. 170



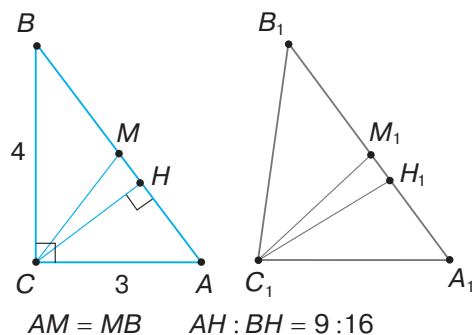
Мал. 171

- 292'**. Чи може чотирикутник бути проєкцією трикутника?
- 293'**. Чи може трикутник бути проєкцією чотирикутника?
- 294'**. Відрізки  $AB$  і  $BC$  лежать на одній прямій. Точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ . Як відносяться проєкції даних відрізків, якщо:
- 1)  $AB : BC = 3 : 4$ ;
  - 2)  $AB : BC = 7 : 1$ ;
  - 3)  $AB : BC = 4 : 9$ ?
- 295'**. На промені  $AO$  відкладіть відрізки:
- 1)  $AB = 2$  см і  $BC = 3$  см;
  - 2)  $AB = 2$  см і  $BC = 1$  см;
  - 3)  $AB = 3$  см і  $BC = 1,5$  см.
- Чому дорівнює відношення їх проєкцій?
- 296'**. Відрізки  $AB$  і  $CD$  лежать на паралельних прямих. Як відносяться їх проєкції, якщо:
- 1)  $AB : CD = 3 : 4$ ;
  - 2)  $AB : CD = 7 : 1$ ;
  - 3)  $AB : CD = 4 : 9$ ?
- 297'**. Точка  $B$  лежить між точками  $A$  і  $C$ .
- 1) Чи може проєкція точки  $C$  лежати між проєкціями точок  $A$  і  $B$ ?
  - 2) Чи може проєкція точки  $A$  лежати між проєкціями точок  $B$  і  $C$ ?
  - 3) Проєкція якої точки лежить між проєкціями двох інших?





Мал. 172



Мал. 173

**298°** На малюнках 172, 173 зображено трикутник  $ABC$  та його паралельну проекцію  $A_1B_1C_1$ .

Назвіть властивості трикутника  $ABC$ , які під час проектування:

- 1) збереглися; 2) не збереглися.



**Пам'ятайте, що у прямокутному трикутнику основа висоти, проведеної до гіпотенузи, ділить гіпотенузу на відрізки, що відносяться, як квадрати катетів (мал. 173).**

**299°** Побудуйте проекцію рівнобедреного трикутника  $ABC$ , в якому проведено:

- 1) медіану до бічної сторони;
- 2) висоту до основи;
- 3) бісектрису кута при вершині.

**300°** Побудуйте проекцію рівнобедреного прямокутного трикутника  $ABC$  з прямим кутом  $C$ , в якому проведено:

- 1) медіани;
- 2) середні лінії;
- 3) висоту до гіпотенузи.

**301°** Побудуйте проекцію прямокутного трикутника  $ABC$ , в якому проведено серединні перпендикуляри до катетів, якщо прямим є кут:

- 1)  $A$ ; 2)  $B$ ; 3)  $C$ .

**302°** Чи може паралельною проекцією паралелограма бути:

- 1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція?

**303°** Чи може паралельною проекцією квадрата бути:

- 1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція?

**304°** Побудуйте проекцію прямокутника  $ABCD$ , в якому сполучено відрізками:

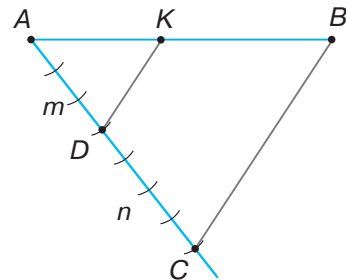
- 1) середину більшої сторони з вершинами протилежної сторони;
- 2) середини протилежних сторін;
- 3) середини суміжних сторін.

- 305°.** Чи можна при паралельному проектуванні трапеції дістати:  
1) трикутник; 2) ромб; 3) трапецію?  
Відповідь поясніть.
- 306°.** Побудуйте проекцію рівнобічної трапеції  $ABCD$ , в якій проведено середню лінію, паралельну основі:  
1)  $AB$ ; 2)  $BC$ ; 3)  $CD$ .
- 307°.** Побудуйте проекцію трапеції  $ABCD$ , в якій відрізок  $KP$  сполучає середини її діагоналей і паралельний основі:  
1)  $AB$ ; 2)  $BC$ ; 3)  $CD$ .
- 308°.** Побудуйте проекцію правильного:  
1) трикутника;  
2) чотирикутника;  
3) шестикутника.  
**Як побудувати проекцію центра даного многокутника?**
- 309°.** Побудуйте зображення правильної призми:  
1) трикутної;  
2) чотирикутної;  
3) шестикутної.
- 310°.** Побудуйте зображення правильної піраміди:  
1) трикутної;  
2) чотирикутної;  
3) шестикутної.
- 311.** Під час паралельного проектування деякої фігури дістали відрізок. Якою могла бути фігура-оригінал?
- 312.** Доведіть, що проекцією середини відрізка є середина його проекції.
- 313.** Побудуйте проекцію відрізка  $AB$ , який точка  $K$  ділить у відношенні:  
1)  $1 : 3$ ; 2)  $3 : 5$ ;  
3)  $3 : 1,5$ ; 4)  $2 : 0,5$ .



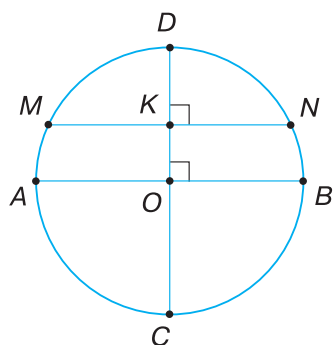
Щоб поділити відрізок  $AB$  у відношенні  $m : n$  (мал. 174):

- 1) проведіть допоміжний промінь з початком в точці  $A$ ;
- 2) від точки  $A$  відкладіть на цьому промені  $m$  рівних відрізків і позначте точку  $D$ ;
- 3) від точки  $D$  відкладіть на цьому ж промені  $n$  рівних відрізків і позначте точку  $C$  – кінець останнього відрізка;
- 4) проведіть пряму  $CB$ ;
- 5) через точку  $D$  проведіть пряму, паралельну  $CB$  – вона перетинає відрізок  $AB$  у шуканій точці  $K$ .

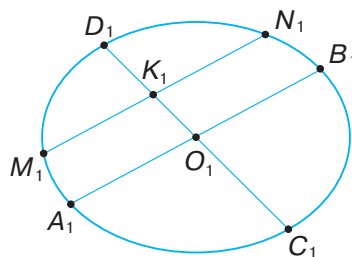


Мал. 174

- 314.** Побудуйте проекцію прямокутного трикутника  $ABC$ , в якому проведено висоту  $CH$  до гіпотенузи, а катети дорівнюють:
- 1)  $AC = 5$  см,  $BC = 12$  см;
  - 2)  $AC = 24$  см,  $BC = 1$  см.
- 315.** У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює  $a$ , бічна сторона —  $b$ , а висота, проведена до основи, —  $c$ . З основи даної висоти трикутника проведено перпендикуляр до його бічної сторони. Побудуйте проекцію даного трикутника, якщо:
- 1)  $a = 10$ ,  $b = 13$ ,  $c = 12$ ;
  - 2)  $a = 14$ ,  $b = 25$ ,  $c = 24$ .
- 316.** Побудуйте проекцію рівнобедреного трикутника з основою  $a$  і бічною стороною  $b$ , в якому позначено центр вписаного кола і центр описаного кола, якщо: 1)  $a = 6$ ,  $b = 8$ ; 2)  $a = 10$ ,  $b = 13$ .
- 317.** Побудуйте проекцію прямокутника  $ABCD$ , в якому проведено перпендикуляр з його вершини до діагоналі, якщо:
- 1)  $AB = 6$  см,  $BC = 8$  см;
  - 2)  $AB = 5$  см,  $BC = 10$  см.
- 318.** Побудуйте проекцію ромба з гострим кутом  $60^\circ$ , в якому проведено висоту з вершини: 1) гострого кута; 2) тупого кута.
- 319.** Діагоналі ромба зі стороною  $a$  дорівнюють  $d_1$  і  $d_2$ . Висота ромба проходить через точку перетину діагоналей. Побудуйте проекцію ромба, якщо:
- 1)  $a = 25$  см,  $d_1 = 30$  см,  $d_2 = 40$  см;
  - 2)  $a = 169$  см,  $d_1 = 130$  см,  $d_2 = 312$  см.
- 320.** Побудуйте проекцію трапеції  $ABCD$ , у якій бісектриси тупих кутів перетинаються на більшій основі і одна з них паралельна:
- 1)  $AB$ ; 2)  $BC$ ; 3)  $CD$ .
- 321.** Побудуйте проекцію рівнобічної трапеції, в якій проведено висоту з вершини тупого кута, а основи дорівнюють:
- 1) 12 см і 24 см;
  - 2) 8 см і 14 см.
- 322.** Побудуйте зображення прямої призми, основа якої — прямокутний трикутник  $ABC$  з катетами:
- 1)  $AC = 5$  см,  $BC = 12$  см;
  - 2)  $AC = 24$  см,  $BC = 1$  см.
- Побудуйте переріз призми площиною, яка проходить через вершину  $C_1$  призми і висоту  $CH$ , проведenu до гіпотенузи основи.
- 323.** Побудуйте зображення прямої призми, основою якої є ромб з гострим кутом  $60^\circ$ . Побудуйте переріз призми площиною, що проходить паралельно її бічному ребру і перетинає основу по висоті ромба, яку проведено з вершини:
- 1) гострого кута; 2) тупого кута.



Мал. 175



Мал. 176

**324.** Побудуйте зображення піраміди, основа якої – рівнобедрений трикутник з основою  $a$  і бічною стороною  $b$ , якщо:

- 1)  $a = 6$ ,  $b = 8$ ;
- 2)  $a = 10$ ,  $b = 13$ .

Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди, вершину її основи та центр кола, вписаного в основу.

**325.** Побудуйте зображення піраміди, основа якої – рівнобічна трапеція з основами:

- 1)  $AB = 12$  см,  $CD = 24$  см;
- 2)  $AC = 8$  см,  $BD = 14$  см.

Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди і висоту основи, проведеної з вершини її тупого кута.

**326\*.** У трикутнику  $ABC$  проведено бісектрису кута  $B$  і відомо, що  $AB : BC = m : n$ . Побудуйте проекцію даного трикутника, якщо:

- 1)  $m = 2$ ,  $n = 3$ ;
- 2)  $m = 5$ ,  $n = 4$ .

**327\*.** Побудуйте проекцію прямокутного трикутника з катетами  $a$  і  $b$  та гіпотенузою  $c$ , в якому позначено центр вписаного кола і центр описаного кола, якщо:

- 1)  $a : b : c = 3 : 4 : 5$ ;
- 2)  $a : b : c = 8 : 15 : 17$ .

**328\*.** Побудуйте проекцію прямокутного трикутника, на сторонах якого побудовано квадрати, якщо трикутник:

- 1) є рівнобедреним;
- 2) має кут  $30^\circ$ .

**329\*.** Побудуйте проекцію тупокутного трикутника з кутом: 1)  $120^\circ$ ; 2)  $150^\circ$ .

В яку точку проектується центр вписаного кола?

А центр описаного кола?

**330\*.** Квадрат  $ABCD$  добудовано до рівнобічної трапеції так, що сторона  $CD$  квадрата стала однією з основ трапеції, а сторона  $BC$  – висотою трапеції.

Побудуйте проекцію отриманої трапеції.

**331\***. Правильний трикутник добудовано до прямокутної трапеції з гострим кутом  $30^\circ$ , висотою, яка дорівнює висоті даного трикутника, та меншою основою, що дорівнює стороні даного трикутника.

Побудуйте проекцію отриманої трапеції.

**332\***. Побудуйте проекцію кола і двох взаємно перпендикулярних його діаметрів.

**Розв'язання.**

1. Побудуємо фігуру-оригінал — коло з центром  $O$ , в якому проведено діаметри  $AB \perp CD$  (мал. 175). Проведемо хорду  $MN$  паралельно діаметру  $AB$ . Оскільки  $AB \perp CD$ , то  $MN \perp CD$ , а за властивістю хорди, перпендикулярної до діаметра,  $MK = KN$ .

2. Проекцією кола є еліпс з центром  $O_1$  (мал. 176). Проекцією діаметра  $AB$  кола є довільний діаметр  $A_1B_1$  еліпса. Проекцією хорди  $MN$  кола є хорда  $M_1N_1$  еліпса, яка паралельна  $A_1B_1$ . Точка  $K$  ділить хорду  $MN$  навпіл, тому точка  $K_1$  є серединою хорди  $M_1N_1$  еліпса. Шуканий діаметр  $C_1D_1$  еліпса проходить через точки  $O_1$  і  $K_1$ .

**333\***. Побудуйте проекцію квадрата:

- 1) вписаного в коло;
- 2) описаного навколо кола.

Розв'яжіть задачу двома способами.

**334\***. Побудуйте проекцію правильного трикутника:

- 1) вписаного в коло;
- 2) описаного навколо кола.

**335\***. Побудуйте проекцію правильного шестикутника:

- 1) вписаного в коло;
- 2) описаного навколо кола.

**336\***. Побудуйте проекцію прямокутника, у якого одна зі сторін дорівнює  $a$  і він є вписаним у коло радіуса  $R$ , якщо:

- 1)  $a = 3$ ,  $R = 2,5$ ;
- 2)  $a = 12$ ,  $R = 6,5$ .

**337\***. Побудуйте зображення правильної трикутної призми. Проведіть січні площини так, щоб дістати правильну шестикутну призму.

**338\***. Побудуйте зображення правильної шестикутної призми. Проведіть січні площини так, щоб дістати правильну трикутну призму.

**339\***. Побудуйте зображення прямокутного паралелепіпеда зі сторонами основи:

- 1)  $AB = 5$  см,  $BC = 12$  см;
- 2)  $AB = 24$  см,  $BC = 1$  см.

Побудуйте січну площину, яка проходить через перпендикуляр, проведений з вершини нижньої основи до її діагоналі, та центр верхньої основи. Через центр нижньої основи проведіть другу січну площину, яка паралельна першій. По якій прямій друга січна площина перетинає верхню основу?

- 340\***. Побудуйте зображення правильної трикутної піраміди, кожна грань якої є вписаною в коло того самого радіуса.
- 341\***. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основа якої — трикутник, вписаний у коло, що має кут:  
1)  $120^\circ$ ; 2)  $150^\circ$ .  
Висота піраміди проходить через центр даного кола.
- 342\***. Побудуйте зображення трикутної піраміди, основа якої — трикутник, вписаний у коло, що має кути:  
1)  $30^\circ$  і  $60^\circ$ ; 2)  $40^\circ$  і  $50^\circ$ .  
Висота піраміди проходить через центр даного кола.
- 343\***. Побудуйте зображення куба.  
Проведіть січні площини так, щоб дістати правильну трикутну:  
1) призму з найбільшою площею основи;  
2) піраміду з найбільшою висотою.
- 344\***. Побудуйте зображення правильної чотирикутної піраміди.  
Проведіть січні площини так, щоб дістати:  
1) прямокутний паралелепіпед з найбільшою площею основи;  
2) куб з найбільшим ребром.

### ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 345.** Яким многокутником може бути тінь споруди на площині подвір'я, якщо споруда має форму:
- 1) прямокутного паралелепіпеда;
  - 2) куба;
  - 3) правильної чотирикутної піраміди?





**КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ**

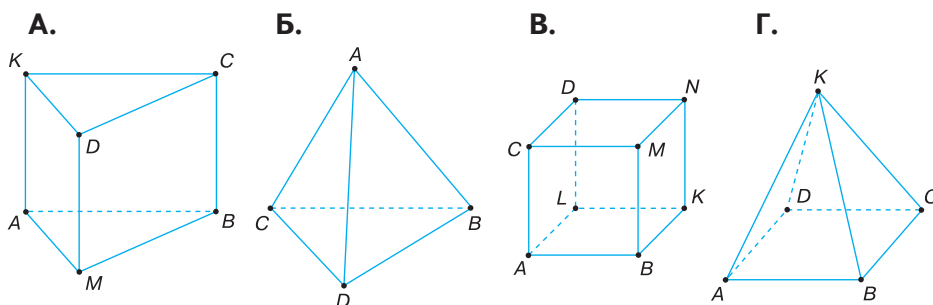
1. Які прямі називаються паралельними? Мимобіжними?
2. Сформулюйте і доведіть властивості паралельних прямих у просторі та ознаки їх паралельності.
3. Як знайти відстань від точки до прямої; між двома паралельними прямими?
4. Яке взаємне розміщення прямої і площини?
5. Опишіть взаємне розміщення двох площин.
6. Які властивості площин, що перетинаються? Доведіть їх.
7. Сформулюйте і доведіть властивості паралельних площин та ознаку їх паралельності.
8. Що таке паралельне проектування? Які його властивості?
9. Поясніть, як побудувати паралельну проекцію трикутника; паралелограма; трапеції.
10. Як побудувати зображення прямої призми; піраміди?

## ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

## № 1

1° На якому з малюнків прямі  $AB$  і  $CD$  не є мимобіжними?



2° Пряма  $a$  не лежить у площині квадрата  $ABCD$  і паралельна його стороні  $AB$ . Яке твердження є правильним?

- А.  $a \parallel CD$ .      Б.  $a \perp CD$ .      В.  $a \parallel AC$ .      Г.  $a \parallel BD$ .

3° Дано:  $\alpha \parallel \beta$ ,  $MN \in \alpha$ ,  $M_1N_1 \in \beta$ ,  $MM_1 \parallel NN_1$ ,  $MN = 10$  см.  
Яка довжина відрізка  $M_1N_1$ ?

- А. 5 см.      Б. 10 см.      В. 15 см.      Г. 20 см.

4° Сторона  $AB$  трикутника  $ABC$  лежить у площині  $\alpha$ , а вершина  $C$  не належить їй. На сторонах  $AC$  і  $BC$  трикутника позначено точки  $K$  і  $N$  так, що  $AK : AC = 2 : 3$ ,  $BN : NC = 2 : 1$ . Яке взаємне розміщення прямої  $KN$  і площини  $\alpha$ ?

- А.  $KN$  лежить в  $\alpha$ .      Б.  $KN \times \alpha$ .      В.  $KN \parallel \alpha$ .      Г. Не можна визначити.

5\* Площини  $\alpha$  і  $\beta$  паралельні. Ромб  $ABCD$  зі стороною 10 см лежить у площині  $\alpha$ . Через його вершини проведено паралельні прямі, що перетинають площину  $\beta$  у точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  і  $D_1$  відповідно. Знайдіть діагоналі чотирикутника  $A_1B_1C_1D_1$ , якщо більша діагональ ромба  $ABCD$  дорівнює 16 см.

- А. 5 см і 10 см.      Б. 8 см і 10 см.      В. 10 см і 16 см.      Г. 12 см і 16 см.



## ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

## № 2

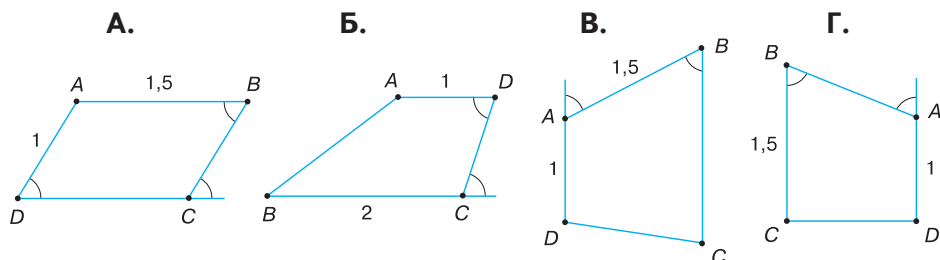
1° Точка  $C$  є серединою відрізка  $AB$ , а точка  $D$  — серединою відрізка  $AC$ . В якому порядку розміщені точки  $A, B, C$  і  $D$  на паралельній проекції відрізка  $AB$ ?

- А.  $A, B, C, D$ .      Б.  $A, C, B, D$ .      В.  $A, D, C, B$ .      Г.  $A, C, D, B$ .

2° Паралельною проекцією трикутника  $ABC$  є рівносторонній  $\Delta A_1B_1C_1$ . Що є проекцією медіани  $\Delta ABC$ , проведеної з вершини  $C$ ?

- А. Медіана до сторони  $A_1B_1$ .      Б. Висота до сторони  $A_1B_1$ .  
В. Бісектриса кута  $C_1$ .      Г. Медіана до сторони  $A_1C_1$ .

3° Треба побудувати паралельну проекцію трапеції  $ABCD$ , основа  $AD$  якої є півтора раза менша від другої основи. Яка з побудов правильна?



4 Яких кутів не може бути у паралельній проекції паралелограма, вписаного в коло?

- А.  $80^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 100^\circ$ .      Б.  $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$ .  
В.  $45^\circ, 45^\circ, 135^\circ, 135^\circ$ .      Г.  $62^\circ, 62^\circ, 118^\circ, 118^\circ$ .

5\* На зображенні правильної трикутної піраміди  $SABC$  проведено січну площину, що проходить через основу висоти піраміди і бічне ребро  $SA$ . Яке ребро піраміди перетинає січна площина і в якому відношенні вона його ділить?

- А.  $SB, 1:1$ .      Б.  $BC, 2:1$ .      В.  $AB, 1:2$ .      Г.  $BC, 1:1$ .